Übung 19 Anwendungen der Differentialrechnung Gradient, Extremwertaufgaben

Lernziele

- den Gradienten einer Funktion erkennen und bestimmen können.
- die Differentialrechnung zur Lösung von Extremwertaufgaben anwenden können.

Aufgaben

Gradient

1. In der folgenden Abbildung ist der Temperaturverlauf in einer Schneedecke dargestellt.

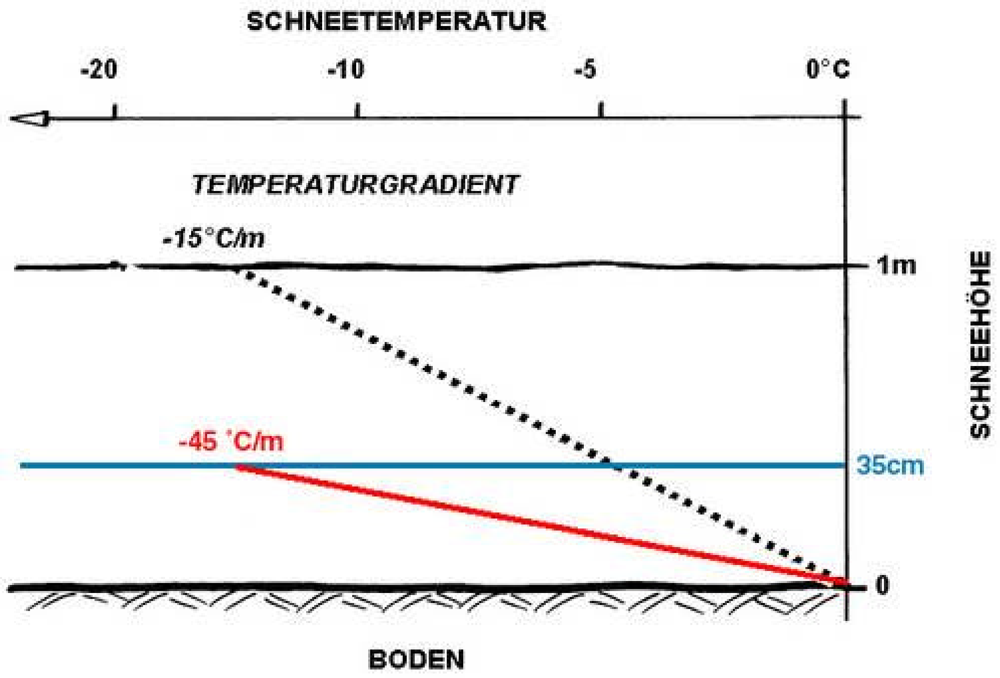


Abb. 2:
Schema zur Erläuterung des Temperaturgradienten.
Rote ausgezogene Linie: Temperaturverlauf in der Schneedecke bei ca. 35 cm Schneehöhe und einer Schneeoberflächentemperatur von minus 15 °C. Es ergibt sich ein Temperaturgradient von 45 °C/m (das Minus steht dafür, dass die Temperatur gegen oben abnimmt).
Schwarz punktierte Linie: Temperaturverlauf in der Schneedecke bei 1 m Schneehöhe und einer Schneeoberflächentemperatur von minus 15 °C. Es ergibt sich ein Temperaturgradient von 15 °C/m. Dies ist etwa die untere Grenze für die aufbauende Umwandlung.

Quelle:
Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung Davos (SLF)
http://wa.slf.ch/index.php?id=6504 (18.4.2006)

Die beiden dargestellten Temperaturverläufe (rot ausgezogen, schwarz punktiert) lassen sich als Funktionen beschreiben, die jeder Höhe über dem Boden eine Temperatur zuordnet.

a) Skizzieren Sie die Grafen der beiden Funktionen in einem kartesischen Koordinatensystem. Auf der Abszisse soll die Höhe über dem Boden und auf der Ordinate die Schneetemperatur aufgetragen werden.

b) Geben Sie die Temperaturgradienten in SI-Einheiten an.

c) Formulieren Sie die beiden Funktionen (Definitionsbereich, Zielbereich, Funktionsvorschrift).

Extremwertaufgaben

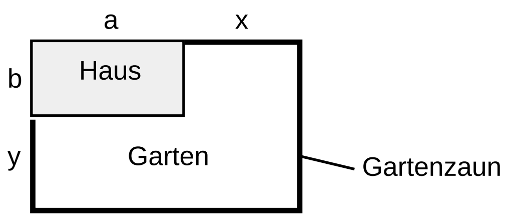
2. Wieviel Quadratmeter rechteckigen ebenen Geländes kann man maximal mit einem 240 m langen Zaun umgeben?

3. Papula: 397/19

4. Es soll eine kreiszylindrische Alu-Dose mit einem vorgegebenen Volumen V hergestellt werden.

   Bestimmen Sie, wie die Abmessungen (Radius, Höhe) der Alu-Dose gewählt werden müssen, damit die Oberfläche bzw. der Materialverbrauch minimal wird.

5. Ein Garten mit der Fläche A soll mit einem Gartenzaun abgegrenzt werden. Der Garten soll im Sinne der folgenden Zeichnung an ein Haus der Länge a und der Breite b angrenzen.



   Bestimmen Sie die Längen x und y, so dass die gesamte Zaunlänge bei gegebener Gartenfläche A minimal wird.

6. In einem Leichtathletikstadion wird ein rechteckiges Feld (schraffiert) von einer Laufstrecke der Länge 400 m (fette Linie) umgeben:

   Bei welcher Länge und Breite des rechteckigen Feldes ist dessen Fläche maximal?

7. Aus einem rechteckigen Blech der Länge 27 cm und der Breite 18 cm wird ein oben offener Kasten hergestellt. Dazu werden an den vier Ecken des Bleches gleich grosse Quadrate ausgeschnitten. Die dadurch erzeugten überstehenden Ränder werden rechtwinklig zu Kastenseiten hochgebogen.

   Bestimmen Sie die Grösse der auszuschneidenden Quadrate, damit das Volumen des Kastens maximal wird.

Lösungen

1. a) ...

   b) rot ausgezogen: $\frac{dT}{dh} = -45$ K/m

   schwarz gepunktet: $\frac{dT}{dh} = -15$ K/m

   c) ...

2. 3600 m^2

3. siehe Papula

4. Radius $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

   Höhe $h = 2r$

5. $x = \sqrt{ab+A} - a$

   $y = \sqrt{ab+A} - b$

   Daraus folgt, dass das ganze Grundstück, bestehend aus dem Haus und dem Garten, eine quadratische Grundfläche aufweist.

6. L := Länge Laufstrecke = 400 m

   Länge $a = \frac{L}{4} = 100$ m

   Breite $b = \frac{L-2a}{\pi} \approx 63.7$ m

7. a := Länge Blech

   b := Breite Blech

   Quadratseite $x = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} \approx 3.5$ cm