Übung 16 Ableitung
Elementare Ableitungsregeln, Kettenregel, Höhere Ableitungen

Lernziele

- die Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotientenregel zur Bestimmung der Ableitung einfacherer Funktionen anwenden können.
- die Kettenregel zur Bestimmung der Ableitung einfacherer zusammengesetzter Funktionen anwenden können.
- höhere Ableitungen einfacherer Funktionen von Hand und mit Hilfe einer Ableitungs-Tabelle bestimmen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

Elementare Ableitungsregeln

1. Papula Seite 391 "Zu Abschnitt 2": 391/1, 391/2, 391/3

2. Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

   a) f: $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \frac{\sin(x)}{x \cdot e^x}$

   b) p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \to y = p(a) = 5ab(ac^2+\sin(b))$

   c) q: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ b \to y = q(b) = 5ab(ac^2+\sin(b))$

   d) r: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c \to y = r(c) = 5ab(ac^2+\sin(b))$

Kettenregel

3. Papula: 392/4, 392/5

Höhere Ableitungen

4. Papula: 393/15, 394/16

5. Eine Polynomfunktion k-ten Grades hat die folgende allgemeine Form:

   f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + ... + a_k \cdot x^k$

   a) Bestimmen Sie
      i) die 1. Ableitung f'.
      ii) die 2. Ableitung f''.

   b) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
      "Die k-te Ableitung einer Polynomfunktion k-ten Grades ist eine konstante Funktion."

Lösungen

1. siehe Papula

2. a) $f': \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \to y = f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)(1+x)}{x^2\, e^x}$

 b) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \to y = p'(a) = 5b\left(2ac^2+\sin(b)\right)$

 c) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ b \to y = q'(b) = 5a\left(ac^2+\sin(b)+b\cdot\cos(b)\right)$

 d) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c \to y = r'(c) = 10a^2bc$

3. siehe Papula

4. siehe Papula

5. a) i) $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f'(x) = a_1 + 2a_2\cdot x + 3a_3\cdot x^2 + 4a_4\cdot x^3 + \ldots + ka_k\cdot x^{k-1}$
 ii) $f'': \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f''(x) = 2a_2 + 6a_3\cdot x + 12a_4\cdot x^2 + 20a_5\cdot x^3 + \ldots + k(k-1)a_k\cdot x^{k-2}$

 b) f' ist eine Polynomfunktion (k-1)-ten Grades.
 f'' ist eine Polynomfunktion (k-2)-ten Grades.
 usw.

 Bei jedem Ableiten reduziert sich der Grad der Polynomfunktion um 1.
 Nach k-maligem Ableiten bleibt eine Polynomfunktion 0-ten Grades, also eine konstante Funktion.