Übung 14 Grenzwert und Stetigkeit
Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit einer Funktion

Lernziele

- verstehen, was der Grenzwert einer Funktion ist.
- verstehen, was der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert einer Funktion ist.
- die symbolische Schreibweise für den Grenzwert einer Funktion kennen und korrekt anwenden können.
- einfachere Grenzwerte von Funktionen bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine einfachere Funktion an einer bestimmten Stelle stetig ist oder nicht.

Aufgaben

1. Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen f_1 und f_2:

   f_1: R → R, x → y = $f_1(x) = x$ f_2: R\{2} → R, x → y = $f_2(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$

   a) Skizzieren Sie die Grafen der beiden Funktionen f_1 und f_2.

   b) Beurteilen Sie für beide Funktionen f_1 und f_2, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: "Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert, besitzt an dieser Stelle jedoch einen Grenzwert."

2. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen über den Grenzwert einer Funktion wahr oder falsch sind:

   a) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0."

   b) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 exisiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert."

   c) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide gleich gross sind, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0."

   d) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 nicht existiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 entweder der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert nicht."

   e) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist er gleich gross wie der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle x_0."

   f) "Wenn die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist, dann existiert an dieser Stelle x_0 der Grenzwert."

   g) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist die Funktion an dieser Stelle x_0 definiert."

3. Papula: 298/4, 298/5, 298/6

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+3}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 5/2} \frac{5-2x}{2x^2-3x-5}$

   d) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a+x)^2-a^2}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a}}{x}$

5. Papula: 298/8, 298/9

Lösungen

1. a) ...

   b) Die Funktionen f_1 und f_2 unterscheiden sich nur an der Stelle $x_0 = 2$:

   f_1 ist an der Stelle $x_0 = 2$ definiert und hat dort den Funktionswert $f_1(2) = 2$.
   Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert: $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x) = 2$

   f_2 ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.
   Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert jedoch: $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x) = 2$

2. a) falsch

   b) wahr

   c) wahr

   d) falsch

   e) wahr

   f) falsch

   g) falsch

3. siehe Papula

4. a) $\frac{1}{2}$

   b) 0

   c) $-\frac{2}{7}$

   d) 6

   e) 2a

   f) $-\frac{1}{a^2}$

5. siehe Papula