Übung 13 Grenzwert und Stetigkeit
Reelle Zahlenfolgen, Grenzwert einer reellen Zahlenfolge

Lernziele

- aus dem Bildungsgesetz einer reellen Zahlenfolge die einzelnen Folgeglieder bestimmen können.
- das Bildungsgesetz einfacherer reeller Zahlenfolgen bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine einfachere reelle Zahlenfolge konvergent oder divergent ist.
- den Grenzwert einer einfacheren konvergenten Zahlenfolge bestimmen können.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$:

   a) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

   b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{n^n}$

2. Papula: 297/1

3. Suchen Sie das Bildungsgesetz der folgenden Zahlenfolgen:

   a) $\langle a_n \rangle = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$

   b) $\langle a_n \rangle = \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \ldots$

   c) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{15}{8}, \frac{12}{5}, \frac{35}{12}, \frac{24}{7}, \ldots$

   d) $\langle a_n \rangle = 1, 1, \frac{7}{5}, \frac{15}{7}, \frac{31}{9}, \frac{63}{11}, \frac{127}{13}, \ldots$

4. Gegeben ist eine konvergente Folge $\langle a_n \rangle$ und eine positive Zahl ε.

   Bestimmen Sie den Grenzwert g der Folge und eine natürliche Zahl n_0 so, dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

   a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0.01$

   b) $a_n = \frac{3}{n+2}$ $\varepsilon = 0.1$

   c) $a_n = \frac{2n+1}{4n}$ $\varepsilon = 0.01$

   d) $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$ $\varepsilon = 0.01$

5. Papula: 297/3 (zuunterst auf der Seite 297)

6. Beurteilen Sie, ob die folgenden reellen Zahlenfolgen konvergent oder divergent sind.

Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert g.
Beurteilen Sie im Falle der Divergenz, ob die Zahlenfolge gegen ∞ oder -∞ strebt.

a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(1-2n)^3}{1+n^3} \right\rangle$

b) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3^n}{n^2} \right\rangle$

c) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3^n-3^{n-1}}{2+3^n} \right\rangle$

d) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{6n-n^2}{5n-4} \right\rangle$

e) $\langle a_n \rangle = 1 , \frac{1}{2} , 2 , \frac{1}{3} , 3 , \frac{1}{4} , 4 , \frac{1}{5} , \ldots$

f) $\langle a_n \rangle = 0 , \frac{1}{2} , 0 , \frac{1}{3} , 0 , \frac{1}{4} , 0 , \frac{1}{5} , \ldots$

g) $\langle a_n \rangle = 0 , \frac{1}{3} , \frac{1}{3} , \frac{3}{5} , \frac{1}{2} , \frac{5}{7} , \frac{3}{5} , \frac{7}{9} , \frac{2}{3} , \frac{9}{11} , \frac{5}{7} , \frac{11}{13} , \ldots$

h) $\langle a_n \rangle = 1 , 2 , \frac{3}{2} , \frac{3}{2} , \frac{5}{3} , \frac{4}{3} , \frac{7}{4} , \frac{5}{4} , \frac{9}{5} , \frac{6}{5} , \frac{11}{6} , \frac{7}{6} , \ldots$

Lösungen

1. a) $\langle a_n \rangle = 1 , 2 , \frac{9}{2} , \frac{32}{3} , \frac{625}{24} , ...$

   b) $\langle a_n \rangle = 1 , - \frac{1}{2} , \frac{2}{9} , - \frac{3}{32} , \frac{24}{625} , ...$

2. siehe Papula

3. a) $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

   b) $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$

   c) $a_n = \frac{n^2-1}{2n}$

   d) $a_n = \frac{2^n-1}{2n-1}$

4. a) $g = 0$ $n_0 = ...$

   b) $g = 0$ $n_0 = ...$

   c) $g = \frac{1}{2}$ $n_0 = ...$

   d) $g = 0$ $n_0 = ...$

5. siehe Papula

6. a) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = - 8$

   b) $\langle a_n \rangle$ divergent $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

   c) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = \frac{2}{3}$

   d) $\langle a_n \rangle$ divergent $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$

   e) $\langle a_n \rangle$ divergent $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq \pm\infty$

   f) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = 0$

   g) $\langle a_n \rangle$ konvergent $g = 1$

   h) $\langle a_n \rangle$ divergent $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq \pm\infty$