# Übung 9 — Funktionstypen
## Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Gebrochenrationale Funktion

### Lernziele

- den Grafen einer Potenz-, Wurzelfunktion skizzieren können.
- die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Potenz-, Wurzelfunktion beurteilen können.
- die Umkehrfunktion einer bijektiven Potenz-, Wurzelfunktion bestimmen können.
- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf den Grafen einer Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen den Grafen einer bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion kennen und verstehen.
- charakteristische Eigenschaften einer gebrochenrationalen Funktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

### Aufgaben

*Potenzfunktion, Wurzelfunktion*

1. Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, den Grafen der

   a) Potenzfunktion $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = x^n$ für n = 2, 3, 4 und 5.

   b) Potenzfunktion $f: R \backslash \{0\} \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = x^{-n}$ für n = 1, 2, 3 und 4.

   c) Wurzelfunktion $f: R^+ \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ für n = 2, 3, 4 und 5.

2. Betrachten Sie die Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten:

   $f: A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = x^n \qquad n \quad N$

   a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f in Abhängigkeit von n für A = B = R.

   b) Wählen Sie für A und B "grösstmögliche" Teilmengen von R, so dass die Funktion f bijektiv wird.

   c) Bestimmen Sie für n = 2, 3 und 4 die Umkehrfunktion $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x)$.

   d) Skizzieren Sie für n = 2, 3 und 4 den Grafen der Umkehrfunktion $f^{-1}$.

3. Betrachten Sie die Potenzfunktion mit rationalem Exponenten:

   $f: R^+ \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = x^{m/n} \qquad m \quad Z,\ n \quad N$

   a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f.

   b) Beurteilen Sie, ob und gegebenenfalls wie man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich von f einschränken müsste, damit f bijektiv wird.

   c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}: \ldots \rightarrow \ldots,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x)$.

4. Betrachten Sie die Potenzfunktionen

   $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = a(x-x_0)^n + y_0 \qquad n \quad N,\ a \quad R\backslash\{0,1\},\ x_0 \quad R\backslash\{0\},\ y_0 \quad R\backslash\{0\}$

   $g: R\backslash\{x_0\} \rightarrow R,\ x \rightarrow y = g(x) = a(x-x_0)^{-n} + y_0 \qquad n \quad N,\ a \quad R\backslash\{0,1\},\ x_0 \quad R\backslash\{0\},\ y_0 \quad R\backslash\{0\}$

   Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen von f und g. Unterscheiden Sie dabei die Fälle n gerade und n ungerade.

   Hinweis:
   Gehen Sie von den Grafen aus, die Sie in der Aufgabe 1 skizziert haben.

*Gebrochenrationale Funktion*

5. Betrachten Sie die allgemeine gebrochenrationale Funktion

$$f: A \to R,\ x \to y = f(x) = \frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0} \qquad m, n \quad N_0,\ a_m \neq 0,\ b_n \neq 0$$

a) Geben Sie für den Definitionsbereich A die "grösstmögliche" Teilmenge von R an.

b) Zeichnen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE die Grafen einiger gebrochenrationaler Funktionen. Unterscheiden Sie dabei zwischen echt und unecht gebrochenrationalen Funktionen.

Finden Sie charakteristische Eigenschaften von echt und unecht gebrochenrationalen Funktionen.

**Lösungen**

1. a) ...

   b) ...

   c) ...

2. a) n ungerade: f injektiv, f surjektiv    f bijektiv
   n gerade: f nicht injektiv, f nicht surjektiv    f nicht bijektiv

   b) n ungerade: A = B = R
   n gerade: $A = B = R_0^+$ oder $A = B = R_0^-$

   c) n = 2: $f^{-1}: R_0^+ \to R_0^+,\ x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
   oder
   $f^{-1}: R_0^- \to R_0^-,\ x \to y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

   n = 3: $f^{-1}: R \to R,\ x \to y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt[3]{-x} & (x < 0) \end{cases}$

   n = 4: $f^{-1}: R_0^+ \to R_0^+,\ x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
   oder
   $f^{-1}: R_0^- \to R_0^-,\ x \to y = f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$

   d) ...

3. a) f injektiv, f nicht surjektiv    f nicht bijektiv

   b) Definitionsbereich = Zielbereich = $R^+$

   c) $f^{-1}: R^+ \to R^+,\ x \to y = f^{-1}(x) = x^{n/m}$

4. ...

5. a) $A = R \backslash \{x_1, x_2, ..., x_N\}$, wobei $x_1, x_2, ..., x_N$ die N Nullstellen des Nennerpolynoms sind $(N \leq n)$

   b) ...