Übung 7　　Funktionstypen
Konstante, lineare, quadratische Funktion

Lernziele

- den Grafen einer konstanten, linearen, quadratischen Funktion skizzieren können.
- die Existenz von Nullstellen einer konstanten, linearen, quadratischen Funktion beurteilen können.
- die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer konstanten, linearen, quadratischen Funktion beurteilen können.
- die Umkehrfunktion einer bijektiven linearen, quadratischen Funktion bestimmen können.
- den Zusammenhang zwischen den Grafen einer bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion kennen und verstehen.
- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf den Grafen einer Funktion kennen und verstehen.
- die Normalform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion von Hand in die Scheitelpunktsform und umgekehrt umformen können.
- die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion bestimmen können, welche in einer konkreten Problemstellung den quadratischen Zusammenhang zweier Grössen beschreibt.

Aufgaben

Konstante, lineare Funktion

1. Bearbeiten Sie für die konstante bzw. lineare Funktion f die folgenden Teilaufgaben:

   i) Skizzieren Sie den Grafen von f.

   ii) Beurteilen Sie, wieviele Nullstellen die Funktion f hat.

   iii) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f.

   iv) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f für den Fall, dass f bijektiv ist.

   v) Beurteilen Sie, ob und wie man die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f beeinflussen kann, indem man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich auf je eine Teilmenge von R einschränkt.

   a) **Konstante** Funktion
   $f: R \rightarrow R, x \rightarrow y = f(x) = a_0$

   b) **Lineare** Funktion
   $f: R \rightarrow R, x \rightarrow y = f(x) = a_1 \cdot x + a_0 \quad (a_1 \neq 0)$

2. Fassen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} einer **linearen** Funktion f als neue Funktion auf, die jedem x R ein y R zuordnet:

   $$f^{-1}: R \rightarrow R, x \rightarrow y = f^{-1}(x)$$

   Die unabhängige Variable soll also wie bei der Ausgangsfunktion f mit x bezeichnet werden.

   a) Zeichnen Sie die Grafen von f und f^{-1} ins gleiche Koordinatensystem.
   Was gibt es für einen grafischen Zusammenhang zwischen den Grafen von f und f^{-1}?

   b) Beurteilen Sie, ob der in a) gefundene Zusammenhang für die Grafen einer **beliebigen** bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion gilt.

Quadratische Funktion

3. Betrachten Sie die einfachstmögliche **quadratische** Funktion f und die aus f abgeleiteten Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4:

$$f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = x^2$$

$$f_1: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_1(x) := f(x-x_0) = (x-x_0)^2 \qquad (x_0 \quad R\backslash\{0\})$$
$$f_2: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_2(x) := f(x) + y_0 = x^2 + y_0 \qquad (y_0 \quad R\backslash\{0\})$$
$$f_3: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_3(x) := f(a\cdot x) = (a\cdot x)^2 \qquad (a \quad R\backslash\{0,1\})$$
$$f_4: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f_4(x) := a\cdot f(x) = a\cdot x^2 \qquad (a \quad R\backslash\{0,1\})$$

a) Skizzieren Sie ins gleiche Koordinatensystem die Grafen von

i) f und f_1
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $x_0>0$ und $x_0<0$.

ii) f und f_2
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $y_0>0$ und $y_0<0$.

iii) f und f_3
Unterscheiden Sie dabei die vier Fälle $a>1$, $0<a<1$, $-1<a<0$ und $a<-1$.

iv) f und f_4
Unterscheiden Sie dabei die vier Fälle $a>1$, $0<a<1$, $-1<a<0$ und $a<-1$.

Formulieren Sie jeweils den bildlichen Zusammenhang zwischen den Grafen mit einem deutschen Satz.

b) Beurteilen Sie, ob die in a) formulierten Zusammenhänge zwischen den Grafen für eine **beliebige** Ausgangsfunktion f gelten.

4. Betrachten Sie die allgemeine quadratische Funktion

$$f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$$

a) Beurteilen Sie grafisch, wieviele Nullstellen eine quadratische Funktion hat.

b) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f.

c) Beurteilen Sie, ob und wie man die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f beeinflussen kann, indem man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich auf je eine Teilmenge von R einschränkt.

5. Gegeben sind die quadratischen Funktionen f: A $\rightarrow$ B, x $\rightarrow$ y = f(x) = ...

a) $f(x) = x^2-2$

b) $f(x) = -(x+3)^2-4$

c) $f(x) = 2x^2-4x+7$

Lösen Sie für jede Funktion a) bis e) die folgenden Aufgaben:

i) Bestimmen Sie die Normalform und die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung von f.

ii) Skizzieren Sie den Grafen von f für A = B = R.

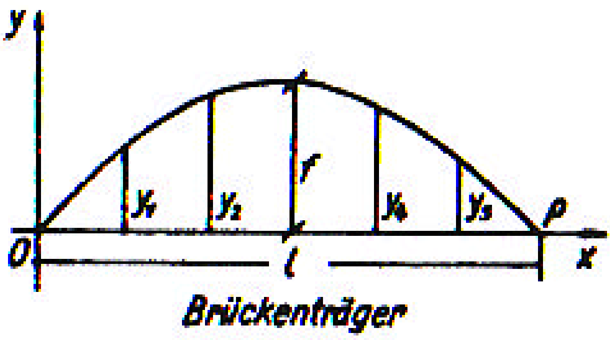
iii) Bestimmen Sie die Mengen A und B so, dass die Funktion f bijektiv wird.
iii.i) Der Graf von f soll die ganze rechte Parabelhälfte inklusive Scheitelpunkt sein.
iii.ii) Der Graf von f soll die ganze linke Parabelhälfte inklusive Scheitelpunkt sein.

iv) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}: B $\rightarrow$ A, x $\rightarrow$ y = $f^{-1}(x)$ für beide Fälle in iii).

v) Skizzieren Sie die Grafen von f und f^{-1} für beide Fälle in iii).

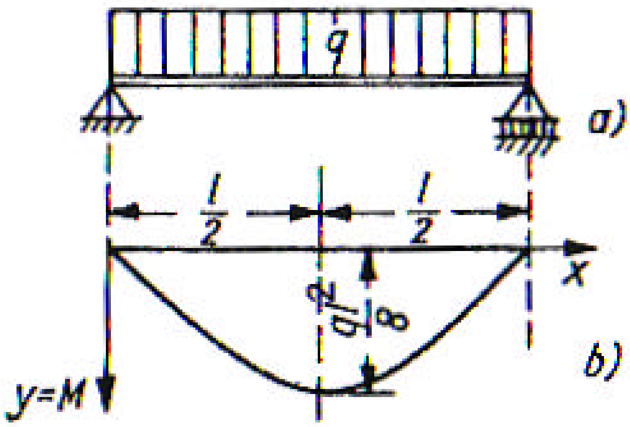
6. Papula: 299/4

7. Der Bogen einer Brücke ist ein Parabelträger von der Spannweite l = 20 m und der Pfeilhöhe f = 5 m.



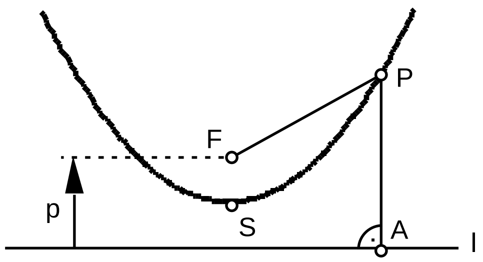
Bestimmen Sie die Länge der fünf in gleichen Abständen angebrachten Vertikalstäbe.

8. Für den in Bild a) dargestellten, mit einer konstanten Streckenlast q belasteten Träger auf zwei Stützen gibt Bild b) den Verlauf des Biegemomentes M, die sogenannte Biegemomentenlinie wieder.
Die Biegemomentenlinie ist eine Parabel:



Stellen Sie gemäss den Angaben des Bildes b) die Gleichung dieser Parabel auf, wobei der Ursprung des Koordinatensystems im linken Auflager liegen soll.

9. * Die Parabel ist definiert als Menge aller Punkte P, welche von einem gegebenen Punkt F und einer gegebenen Geraden l den gleichen Abstand haben (vgl. Unterricht):



$\overline{PF} = \overline{PA}$

Der Punkt F heisst **Brennpunkt**, die Gerade l **Leitgerade** und der Punkt S **Scheitelpunkt** der Parabel.

Betrachten Sie eine Parabel mit den folgenden Eigenschaften:
- Der Scheitelpunkt S hat die allgemeine Lage $S(x_0|y_0)$.
- Die Leitgerade l verläuft parallel zur x-Achse.

(Fortsetzung auf Seite 4)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

Vorgehen:

i) Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes F in Abhängigkeit des Parameters p an.

ii) Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an, und zwar in Abhängigkeit des Parameters p und der Koordinaten x und y des Punktes P(x|y).

iii) Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren $\vec{PF}$ und $\vec{PA}$.

iv) Drücken Sie nun die Bedingung $\overline{PF} = \overline{PA}$ vektoriell in der Form $|\vec{PF}|^2 = |\vec{PA}|^2$ aus, und setzen Sie die Komponenten von $\vec{PF}$ und $\vec{PA}$ ein.

v) Lösen Sie die in iv) erhaltene Gleichung nach y auf.

b) Zeigen Sie, dass die Parabel als Graf einer quadratischen Funktion aufgefasst werden kann.

c) Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion f hat die allgemeine Form

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Zeigen Sie, dass der Graf jeder quadratischen Funktion eine Parabel ist.

Hinweise:
- Vergleichen Sie die Funktionsgleichung mit der in a) hergeleiteten Gleichung der Parabel.
- Wenn es gelingt, zu jeder Wahl für die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 einen Parameterwert p und Koordinaten x_0 und y_0 für den Scheitelpunkt S zu finden, ist bewiesen, dass der Graf jeder quadratischen Funktion eine Parabel ist.

Lösungen

1. a) i) ...

ii) $a_0 = 0$: Jedes x R ist Nullstelle von f.
$a_0 \neq 0$: f besitzt keine Nullstelle

iii) nicht injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

iv) f besitzt keine Umkehrfunktion.

v) ...

b) i) ...

ii) f hat genau eine Nullstelle bei $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$

iii) injektiv, surjektiv bijektiv

iv) f^{-1}: R → R, y → x = $f^{-1}(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_0}{a_1}$

v) ...

2. a) ...

b) ...

3. a) i) Der Graf von f_1 ist gegenüber dem Grafen von f um x_0 horizontal nach rechts (falls $x_0>0$) bzw. nach links (falls $x_0<0$) verschoben.

ii) Der Graf von f_2 ist gegenüber dem Grafen von f um y_0 vertikal nach oben (falls $y_0>0$) bzw. nach unten (falls $y_0<0$) verschoben.

iii) Der Graf von f_3 ist gegenüber dem Grafen von f horizontal gestreckt (falls $|a|>1$) bzw. gestaucht (falls $|a|<1$). Für $a<0$ wird der Graf zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.

iv) Der Graf von f_4 ist gegenüber dem Grafen von f vertikal gestreckt (falls $|a|>1$) bzw. gestaucht (falls $|a|<1$). Für $a<0$ wird der Graf zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

b) ....

4. a) 0, 1 oder 2 Nullstellen

b) nicht injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

c) ...

5. a) i) Normalform: $y = f(x) = x^2-2$
Scheitelpunktsform: $y = f(x) = x^2-2$

ii) ...

iii) iii.i) $A = R_0^+$, $B = \{y \ R \mid y \geq -2\}$
iii.ii) $A = R_0^-$, $B = \{y \ R \mid y \geq -2\}$

iv) iv.i) f^{-1}: B → A, x → $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$
iv.ii) f^{-1}: B → A, x → $y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x+2}$

v) v.i) ...
v.ii) ...

b) i) Normalform: $y = f(x) = x^2+6x+5$
Scheitelpunktsform: $y = f(x) = -(x+3)^2-4$

ii) ...

iii) iii.i) $A = \{x\ \ R \mid x \geq -3\}$, $B = \{y\ \ R \mid y \leq -4\}$
iii.ii) $A = \{x\ \ R \mid x \leq -3\}$, $B = \{y\ \ R \mid y \leq -4\}$

iv) iv.i) $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{-x-4}\ -3$
iv.ii) $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{-x-4}\ -3$

v) v.i) ...
v.ii) ...

c) i) Normalform: $y = f(x) = 2x^2-4x+7$
Scheitelpunktsform: $y = f(x) = 2(x-1)^2+5$

ii) ...

iii) iii.i) $A = \{x\ \ R \mid x \geq 1\}$, $B = \{y\ \ R \mid y \geq 5\}$
iii.ii) $A = \{x\ \ R \mid x \leq 1\}$, $B = \{y\ \ R \mid y \geq 5\}$

iv) iv.i) $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-5}{2}}\ +1$

iv.ii) $f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-5}{2}}\ +1$

v) v.i) ...
v.ii) ...

6. siehe Papula

7. $y_1 = y_5 = 2.78$ m $\qquad y_2 = y_4 = 4.44$ m $\qquad y_3 = f = 5.00$ m

8. $y = -\frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{ql^2}{8}$

9. * a) i) ...

ii) ...

iii) ...

iv) ...

v) $y = \frac{1}{2p}(x-x_0)^2 + y_0$

b) Die in a) hergeleitete Parabelgleichung ist die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion
$f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = \frac{1}{2p}(x-x_0)^2 + y_0$

c) ...