

Übung 6 Funktionen Zusammenhang Funktion-Gleichung, Funktion/Gleichungen mit Maple

Lernziele

- den Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer Funktion und den Lösungen einer Gleichung verstehen.
- die Nullstellen einer einfacheren Funktion von Hand bestimmen können.
- einfachere Gleichungen von Hand lösen können.
- mit Hilfe des Computerprogrammes MAPLE eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem lösen können.
- ein zur Lösung einer einfacheren Textaufgabe gehöriges Gleichungssystem aufstellen können.

Aufgaben

1. Der Graf einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$ schneide die x -Achse n -mal und berühre sie m -mal. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, wieviele Lösungen die Gleichung $f(x) = 0$ hat.

2. Betrachten Sie die folgende Aufgabenstellung:

"Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Grafen der Funktion
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = 3x^8 - 2x^5 + x - 6$ mit der Geraden $y = 1$."

Diese Aufgabenstellung könnte auf folgende zwei Arten umformuliert werden:

- "Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion"
- "Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung"

Vervollständigen Sie die beiden Sätze.

3. Bestimmen Sie von Hand die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = 5x^2 - x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^2 + x + a$

Bem.: Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen reellen Werte für den Parameter a .

4. Studieren Sie die Maple-Files "funktion.mws" und "gleichungen.mws", welche bereits im Unterricht gezeigt wurden.

Sie finden die Files im Internet unter:

<http://telecom.tlab.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...)

5. Lösen Sie die folgenden Bestimmungsgleichungen nach x auf.

i) von Hand, d.h. ohne Taschenrechner
Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen reellen Werte für die Parameter p, a, b, c .

ii) mit dem Computerprogramm MAPLE
Vergleichen Sie die Lösungen mit denjenigen, die Sie von Hand bestimmt haben.

a) $x(p-3) = p$

b) $cx = 5c+5$

c) $(x+1)(p-2) = 2px$

d) $(a-b)x = a$

6. Lösen Sie mit MAPLE die folgenden Gleichungssysteme:

Papula: 41/4, 41/5, 41/6

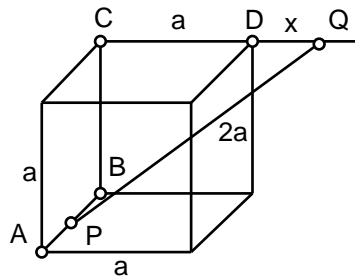
7. Bearbeiten Sie die nachfolgenden "Textaufgaben" wie folgt:
- Erstellen Sie ein Gleichungssystem, welches die gesuchte(n) Grösse(n) als Unbekannte enthält.
 - Lösen Sie das Gleichungssystem mit MAPLE.

Hinweise:

- Versuchen Sie, möglichst einfache Gleichungen aufzustellen.
 - Führen Sie nebst den gesuchten Grössen allenfalls noch weitere zweckmässige Unbekannte ein.
 - Scheuen Sie sich nicht vor einer allfälligen grossen Zahl von Gleichungen. Das Auflösen des Gleichungssystems erledigt ja der Computer.
- a) "Ein Fenster hat die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Halbkreis. Die Gesamthöhe des Fensters misst 4.20 m, der Flächeninhalt 8.00 m². Bestimmen Sie den Kreisradius."
- b) "Wenn man die Grundkante einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) um 1 m verkürzt und die Höhe dafür um 1 m verlängert, bleibt die Körperdiagonale gleich lang. Wenn man aber stattdessen die Grundkante um 1 m verlängert, muss man die Höhe um 3 m verkürzen, damit die Körperdiagonale gleich lang bleibt. Wie lang sind die Kanten der ursprünglichen Säule?"
- c) "Ein Schuldner muss zwei Hypotheken verzinsen, eine zu 6% und eine zu 6.5%. Er muss dafür pro Jahr Fr. 18'560.- aufbringen. Dieser Betrag wäre um Fr. 1'520.- kleiner, wenn die Zinssätze auf 5.5% bzw. 6% sinken würden. Wie gross sind die beiden Hypotheken?"
- d) "Die Arme einer Hebelwaage sind verschieden lang. Legt man eine Masse auf die linke Waagschale, so braucht es auf der rechten 4.5 kg, damit die Waage im Gleichgewicht ist. Legt man dieselbe Masse auf die rechte Schale, so braucht es auf der linken 8 kg für das Gleichgewicht. Berechnen Sie die Masse sowie das Verhältnis der Hebelarmenlängen."
- e) "Ein Würfel hat die bekannte Kantenlänge a. Der Punkt P liegt auf der Kante AB, der Punkt Q auf der Verlängerung der Kante CD so, dass gilt:

$$\overline{PQ} = 2a \quad \text{und} \quad \overline{AP} = \overline{DQ}$$

Wie gross ist $x = \overline{DQ}$?"



- f) "Zwei Kreise haben den gleichen Radius und schneiden sich so, dass der eine Kreis durch das Zentrum des anderen läuft. Bestimmen Sie den Inhalt der Schnittfläche der beiden Kreise in Abhängigkeit des Kreisradius' r ."

Lösungen

1. n+m Lösungen
2. - "Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = g(x) = (3x^8 - 2x^5 + x - 6) - 1$."
- "Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $(3x^8 - 2x^5 + x - 6) - 1 = 0$."
3. a) $x_1 = 0$
 $x_2 = \frac{1}{5}$
b) $a < \frac{1}{4}$ $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2}$
 $a = \frac{1}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$
 $a > \frac{1}{4}$ keine Nullstelle
4. ...
5. a) $p = 3$ keine Lösung
 $p \neq 3$ $x = \frac{p}{p-3}$
b) $c = 0$ keine Lösung
 $c \neq 0$ $x = \frac{5c+5}{c}$
c) $p = -2$ keine Lösung
 $p \neq -2$ $x = \frac{p-2}{p+2}$
d) $a = b = 0$ $x \in \mathbb{R}$
 $a = b \neq 0$ keine Lösung
 $a \neq b$ $x = \frac{a}{a-b}$
6. siehe Papula
7. Ein Maple-Musterfile "Textaufgaben Übung 6 (textaufgaben.mws)" zu den Teilaufgaben a), d), e) und f) finden Sie im Internet unter:
<http://telecom.tlab.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...)
 - a) Radius = 1.00 m
 - b) Grundkante = 2.5 m
Höhe = 3.5 m
 - c) ...
 - d) Masse = 6 kg
(Hebelarmlänge links) : (Hebelarmlänge rechts) = 3 : 4
 - e) Gesuchte Länge = 0.71 a
 - f) Gesuchte Fläche = 1.66 r²