Übung 5 Funktionen
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Umkehrfunktion

Lernziele

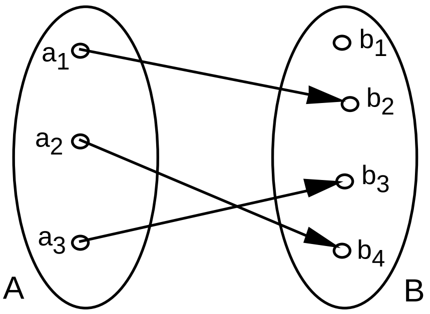
- beurteilen können, ob eine Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv ist oder nicht.
- die zu einer einfacheren bijektiven Funktion gehörige Umkehrfunktion bestimmen können.
- die Eigenschaften des Grafen einer bijektiven Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen dem Grafen einer bijektiven Funktion und dem Grafen der dazugehörigen Umkehrfunktion verstehen.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

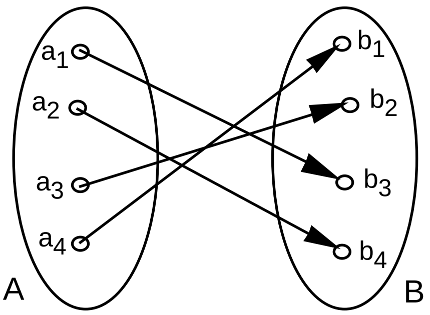
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

1. Beurteilen Sie mit schlüssigen Begründungen die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität der folgenden Funktionen:

a)



b)



c) f: $R^- \rightarrow R^+$, $x \rightarrow y = f(x) = x^2$

d) f: $R\backslash\{0\} \rightarrow R^+$, $x \rightarrow y = f(x) = x^2$

e) A = {Vater, Mutter, Sohn, Tochter}, B = {1948, 1976, 1950, 1978}
f: $A \rightarrow B$, $x \rightarrow y = f(x)$ = Jahrgang von x

i) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
Sohn hat Jahrgang 1976, Tochter hat Jahrgang 1978

ii) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
Sohn hat Jahrgang 1975, Tochter hat Jahrgang 1978

iii) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
Sohn und Tochter haben Jahrgang 1978

f) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen, B = {1976, 1977, ... , 1985, 1986}
f: $A \rightarrow B$, $x \rightarrow y = f(x)$ = Jahrgang von x

g) A = Menge aller Schweizer Vereine, B = Menge aller Menschen
$f\colon A \to B,\ x \to y = f(x) =$ Präsident/-in von x

h) $$f\colon N \to Z,\ n \to z = f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{(n gerade)} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{(n ungerade)} \end{cases}$$

2. Die Funktionen in den Aufgaben 1 e) iii) und 1 g) sind nicht bijektiv.

Machen Sie für diese beiden Funktionen je einen Vorschlag, wie man die Definitionsmenge A und/oder die Zielmenge B einschränken müsste, um bei gleichbleibender Funktionsvorschrift eine bijektive Funktion zu erhalten.

3. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

"Eine Funktion $f\colon A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn die beiden Mengen A und B gleich viele Elemente enthalten."

Umkehrfunktion

4. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} aller bijektiven Funktionen der Aufgabe 1.

5. Gegeben sei eine bijektive Funktion $f\colon A \to B,\ x \to y = f(x)$, wobei A und B Teilmengen von R seien, d.h. A R und B R.

a) Beschreiben Sie die Eigenschaft(en), die der Graf von f besitzt im Gegensatz zum Grafen einer Funktion, die nicht bijektiv ist.

b) Skizzieren Sie den Grafen der zu f gehörigen Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to A,\ y \to x = f^{-1}(y)$.

6. Betrachten Sie die Funktion

$f\colon R \to R,\ x \to y = f(x) = mx + q$ (m R, q R)

a) Bestimmen Sie, für welche Werte von m und q die Funktion f bijektiv ist.

b) Bestimmen Sie für den Fall, dass f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1}.

c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion von f ist, indem Sie nachprüfen, dass $f^{-1} \circ f = 1$ gilt.

Lösungen

1. a) injektiv, nicht surjektiv (Nicht jedes b B ist Bildelement.) nicht bijektiv

   b) injektiv, surjektiv bijektiv

   c) injektiv, surjektiv bijektiv

   d) nicht injektiv (Jedes y R^+ ist Bildelement von zwei x R.), surjektiv nicht bijektiv

   e) i) injektiv, surjektiv bijektiv
   ii) keine Funktion (1975 B)
   iii) nicht injektiv (1978 tritt zweimal als Bildelement auf..), nicht surjektiv (1976 tritt nicht als Bildelement auf.) nicht bijektiv

   f) nicht injektiv (Die Elemente in B treten mehrfach als Bildelemente auf.), surjektiv
   nicht bijektiv

   g) nicht injektiv (Es gibt Menschen, die PräsidentIn von mehr als einem Schweizer Verein sind.), nicht surjektiv (Nicht jeder Mensch ist PräsidentIn eines Schweizer Vereins.)
   nicht bijektiv

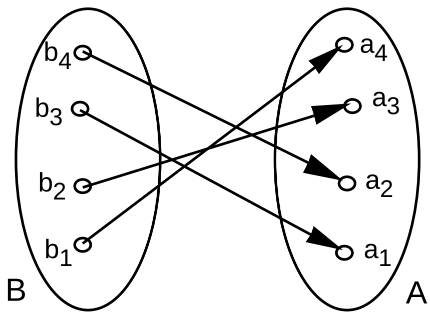
   h) injektiv, surjektiv bijektiv

2. 1 e) iii) A' = {Vater, Mutter, Tochter}
   B' = {1948, 1950, 1978}

   1 g) A' = Menge aller Schweizer Vereine, deren Präsidenten/-innen genau einen Verein präsidieren.
   B' = Menge aller Menschen, die Präsident/-in von genau einem Schweizer Verein sind

3. ...

4. 1 b)



   1 c) f^{-1}: $R^+ \to R^-$, $y \to x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

   1 e) i) A = {Vater, Mutter, Sohn, Tochter}, B = {1948, 1976, 1950, 1978}
   f^{-1}: B → A, $y \to x = f^{-1}(y)$ = Person, deren Jahrgang y ist

   1 h) f^{-1}: $Z \to N$, $z \to n = f^{-1}(z) = \begin{cases} 2z & (z \geq 0) \\ -2z - 1 & (z < 0) \end{cases}$

5. a) ...

   b) ...

6. a) f bijektiv, falls $m \neq 0$

   b) f^{-1}: $R \to R$, $y \to x = f^{-1}(y) = \frac{y - q}{m}$

   c) ...