Übung 4 Funktionen
Grundbegriffe, Verknüpfung von Funktionen

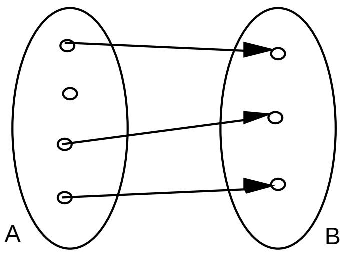
Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- die Funktionsvorschrift einer Funktion korrekt formulieren können.
- eine Funktion in einem Pfeildiagramm, in einer Tabelle darstellen können.
- den Bildbereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- die Verknüpfung zweier Funktionen bilden können.
- eine gegebene Funktion als Verknüpfung zweier Funktionen darstellen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

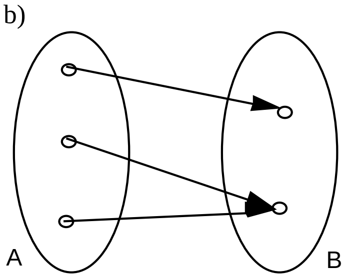
Aufgaben

1. Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion $A \to B$ ist:

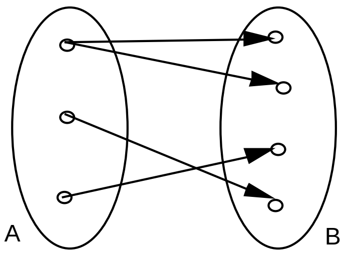
a)



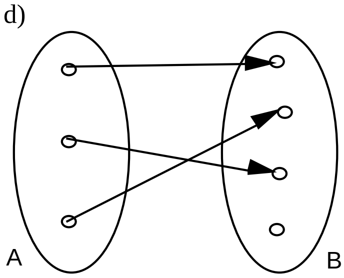
b)



c)



d)



e) A = Menge aller Häuser, B = Menge aller ArchitektInnen
f: $A \to B$, $h \to a = f(h)$ = ArchitektIn von h

f) A = Menge aller Vereine in der Schweiz, B = Menge aller SchweizerInnen
p: $A \to B$, $x \to y = p(x)$ = PräsidentIn von x

g) $A = \{1976, 1977, \dots, 1985, 1986\}$
B = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
f: $A \to B$, $j \to m = f(j)$ = Mensch mit Jahrgang j

h) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
$B = \{1976, 1977, \dots, 1985, 1986\}$
j: $A \to B$, $m \to j = j(m)$ = Jahrgang von Mensch m

i) f: $R \to R$, $x \to y = f(x) = x^2$

j) f: $R^+ \to R$, $x \to y = f(x)$ = Zahl, welche quadriert gleich x ergibt

k) f: $N \to N$, $x \to y = f(x)$ = Ganzzahliger Teiler von x

2. Gegeben sind die Mengen A und B.

Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion $A \to B$.

i) Geben Sie die Funktionsvorschrift an.
ii) Stellen Sie die Funktion in einem Pfeildiagramm dar.
iii) Stellen Sie die Funktion in einer Tabelle dar.

a) A = Menge aller Tage des Jahres 2003
$B = \mathbb{R}$

b) A = Menge aller Schweizer Firmen
B = Menge aller Schweizer Kantone

c) A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Dreiecke

d) $A = \{-3, 1, 4, 7, 11, 14\}$
$B = \{-6, 2, 8, 14, 22, 28\}$

e) $A = \mathbb{R}^-$
$B = \mathbb{R}^+$

3. Bestimmen Sie den Bildbereich W der folgenden Funktionen:

a) A = {Januar, Februar, März, ..., Dezember}
B = {A, B, C, ..., Z}
$f\colon A \to B,\ m \to b = f(m)$ = Anfangsbuchstabe des Monats m

b) A = Menge aller Nachbarländer der Schweiz
B = Menge aller europäischen Städte
$h\colon A \to B,\ n \to s = h(n)$ = Hauptstadt des Nachbarlandes n

c) $A = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R}_0^+$
$b\colon A \to B,\ x \to y = b(x) = |x|$

d) Funktion f aus Aufgabe 1 h)

e) Funktion f aus Aufgabe 1 i)

4. Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to f(x)$

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie jeweils die folgenden Funktionswerte:

i)	$f(0)$	ii)	$f(1)$	iii)	$f(-1)$
iv)	$f(a)$	v)	$f(x+a)$		

5. Gegeben sind die beiden Funktionen f und g.

Bestimmen Sie die verknüpfte Funktion $h = g \circ f$

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = x^2$
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to z = g(y) = -2y$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \sin(x)$
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to z = g(y) = \dfrac{y}{y^2+1}$

c) (siehe Seite 3)

c) f: $R\backslash\{-1\} \to R\backslash\{0\}$, $x \to y = f(x) = \frac{2}{x+1}$

g: $R\backslash\{0\} \to R$, $y \to z = g(y) = \frac{2}{y} - 1$

d) f: $R \to R$, $x \to y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

g = f

e) A = Menge aller Studierenden der HTW Chur
B = Menge aller Länder der Erde
C = N (= Menge aller natürlichen Zahlen)

f: $A \to B$, $s \to l = f(s)$ = Herkunftsland des Studierenden s
g: $B \to C$, $l \to e = g(l)$ = Einwohnerzahl des Landes l

6. Gegeben ist die Funktion h.

Fassen Sie die Funktion h als Verknüpfung zweier Funktionen f und g auf, d.h. $h = g \circ f$, und geben Sie die beiden Funktionen f und g an.

a) h: $R \to R$, $x \to z = h(x) = e^{-2x}$

b) h: $N \to R$, $x \to z = h(x) = (x-1)\cdot\sin(2x)$

c) h: $R \to R$, $x \to z = h(x) = x$

d) A = Menge aller Autobahntunnels im Kanton Graubünden
C = Menge aller Tage eines Jahres

h: $A \to C$, $t \to d = h(t)$ = Osterdatum im Einweihungsjahr des Autobahntunnels t

7. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Verknüpfung zweier Funktionen kommutativ ist, d.h. ob gilt: $g \circ f = f \circ g$

Hinweis: Betrachten Sie Beispiele aus den Aufgaben 5 und 6.

Lösungen

1. a) keine Funktion (Zuordnung nicht definiert für alle a   A)

   b) Funktion

   c) keine Funktion (Zuordnung nicht eindeutig)

   d) Funktion

   e) keine Funktion (f nicht oder nicht eindeutig definiert für alle h   A)

   f) keine Funktion (p nicht definiert für alle x   A)

   g) keine Funktion (f nicht eindeutig)

   h) Funktion

   i) Funktion

   j) keine Funktion (f nicht eindeutig)

   k) keine Funktion (f nicht eindeutig)

2. a) i) m: $A \to B$, $d \to T = m(d)$ = Maximaltemperatur in Chur am Tage d
      ii) ...
      iii) ...

   b) i) s: $A \to B$, $f \to k = s(f)$ = Kanton, an welchen f die meisten Steuern zahlen muss
      ii) ...
      iii) ...

   c) i) f: $A \to B$, $v \to d = f(v)$ = gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie v
      ii) ...
      iii) ...

   d) i) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = 2x$
      ii) ...
      iii) ...

   e) i) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = -x$
      ii) ...
      iii) ...

3. a) W = {A, D, F, J, M, N, O, S}

   b) W = {Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}

   c) W = B

   d) W = B

   e) $W = R_0^+$

4. a) i) $f(0) = 0^3-0 = 0$ ii) $f(1) = 1^3-1 = 0$
      iii) $f(-1) = (-1)^3-(-1) = 0$ iv) $f(a) = a^3-a$
      v) $f(x+a) = (x+a)^3-(x+a)$

   b) i) $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$ ii) $f(1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$
      iii) $f(-1) = \frac{(-1)^2}{-1+1}$ nicht definiert iv) $f(a) = \frac{a^2}{a+1}$
      v) $f(x+a) = \frac{(x+a)^2}{x+a+1}$

5. a) h: $R \to R,\ x \to z = h(x) = g(f(x)) = -2x^2$

b) h: $R \to R,\ x \to z = h(x) = g(f(x)) = \dfrac{\sin(x)}{\sin^2(x)+1}$

c) h: $R\backslash\{-1\} \to R,\ x \to z = h(x) = g(f(x)) = x$

d) h: $R \to R,\ x \to z = h(x) = f(f(x)) = \dfrac{(x^2+1)^2}{1 + (x^2+1)^2}$

e) h: $A \to C,\ s \to e = h(s) = g(f(s))$ = Einwohnerzahl des Herkunftslandes des Studierenden s

6. a) f: $R \to R,\ x \to y = f(x) = -2x$
g: $R \to R,\ y \to z = g(y) = e^y$

b) f: $N \to Z,\ x \to y = f(x) = x-1$
g: $Z \to R,\ y \to z = g(y) = y \cdot \sin\big(2(y+1)\big)$

c) f: $R \to R,\ x \to y = f(x) = 2x$
g: $R \to R,\ y \to z = g(y) = \dfrac{y}{2}$

d) B = Menge aller Jahre von 1900 bis heute

f: $A \to B,\ t \to j = f(t)$ = Einweihungsjahr des Autobahntunnels t
g: $B \to C,\ j \to d = g(j)$ = Osterdatum im Jahr j

7. ...