

# Ganzrationale Funktion (Polynomfunktion)

## Definition

**Def.:** Eine Funktion  $f$  der Form

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$$

ist eine **ganzrationale Funktion** oder **Polynomfunktion** vom **Grad  $n$** .

Bsp.:	$f(x) = 4$	Grad $n = 0$	Konstante Funktion
	$f(x) = 2x - 3$	Grad $n = 1$	Lineare Funktion
	$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$	Grad $n = 2$	Quadratische Funktion
	$f(x) = x^3 - x$	Grad $n = 3$	Kubische Funktion
	$f(x) = 4x^8 - x^5 + 3x$	Grad $n = 8$	

## Nullstellen einer ganzrationalen Funktion

**Satz:** Ist  $x_1$  eine Nullstelle der Polynomfunktion  $f$  vom Grad  $n$  ( $n > 0$ ), so kann das Polynom  $f(x)$  als Produkt des Linearfaktors  $(x - x_1)$  und eines Polynoms  $g(x)$  dargestellt werden, wobei die Polynomfunktion  $g$  vom Grad  $n-1$  ist:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$$

Bew.:  $x = x_1$

$$f(x_1) = 0, \text{ da } x_1 \text{ Nullstelle von } f \\ (x_1 - x_1) \cdot g(x_1) = 0 \cdot g(x_1) = 0 \\ f(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot g(x_1)$$

$x \neq x_1$

Bsp.:  $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$   
f vom Grad 2

Polynomdivision:  $\frac{f(x)}{x - x_1} = (a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0) : (x - x_1) = a_2 \cdot x + (a_1 + a_2 \cdot x_1) =: g(x)$   
 $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$ , g vom Grad 1

allg.: ...

Bsp.:  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

f ist eine Polynomfunktion vom Grad 3,  $x_1 = 1$  ist eine Nullstelle von f

Polynomdivision:  $\frac{f(x)}{(x - 1)} = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$

$f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6)$ , g mit  $g(x) = x^2 - x - 6$  ist eine Polynomfunktion vom Grad 2

**Satz: Fundamentalsatz der Algebra**

Eine Polynomfunktion vom Grad  $n$  ( $n > 0$ ) hat höchstens  $n$  reelle Nullstellen.

**Def.:** Die Zahl  $x_1$  ist eine **m-fache Nullstelle** der Polynomfunktion  $f$  vom Grad  $n$  ( $m \leq n$ ), falls  $f(x)$  dargestellt werden kann als

$$f(x) = (x - x_1)^m \cdot g(x)$$

wobei die Polynomfunktion  $g$  vom Grad  $n-m$  ist.

**Def.:**  $x_1, x_2, \dots, x_N$  seien alle  $N$  reellen Nullstellen der Polynomfunktion  $f$ , und  $g$  sei eine Polynomfunktion ohne reelle Nullstellen. Die Darstellung

$$f(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x - x_N)^{m_N} \cdot g(x)$$

heisst **Produktform** oder **Linearfaktorzerlegung** des Polynoms  $f(x)$ .

**Satz:** Hat eine Polynomfunktion vom Grad  $n$  mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle  $x_1$ , so ist  $x_1$  ein ganzzahliger Teiler des konstanten Gliedes  $a_0$ .

Bew.:  $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

$$f(x_1) = 0 = a_n \cdot x_1^n + a_{n-1} \cdot x_1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_1 + a_0$$

$$a_n \cdot x_1^n + a_{n-1} \cdot x_1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_1 = -a_0$$

$$x_1 \cdot (a_n \cdot x_1^{n-1} + a_{n-1} \cdot x_1^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

Die beiden Faktoren links sind ganze Zahlen. Ebenso ist  $a_0$  eine ganze Zahl.

Beide Faktoren links, also insbesondere  $x_1$ , sind ganzzahlige Teiler von  $a_0$ .

Bsp.:  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 12$

Auffinden einer ersten Nullstelle  $x_1$

$a_0 = 12$ , ganzzahlige Teiler von  $a_0$ : 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12

$$f(1) = 4 \neq 0, f(-1) = 12 \neq 0$$

$f(2) = 0$ , d.h.  $x_1 = 2$  ist eine Nullstelle von  $f$

$$f(x) = (x - 2) \cdot g(x)$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - 2} = (2x^3 - 4x^2 - 6x + 12) : (x - 2) = 2x^2 - 6$$

Auffinden von weiteren Nullstellen

$$g(x) = 2x^2 - 6 = 0$$

$$x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$$

Produktform von  $f(x)$

$$f(x) = 2(x - 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$