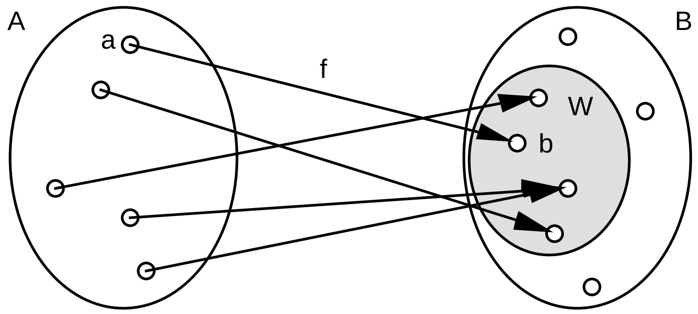
Funktionen

Definition und Beispiele

Def.: Eine **Funktion** f ist eine Vorschrift, die **jedem** Element a aus einer Menge A **genau ein** Element b aus einer Menge B zuordnet.



Durch die Funktion f wird die Menge A auf die Menge B **abgebildet**.

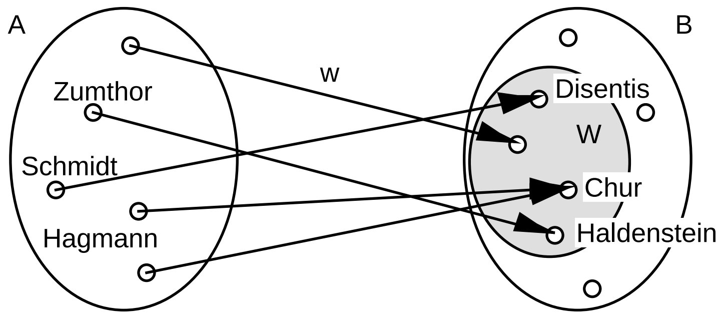
Schreibweise: f: A → B
a → b = f(a) ("f von a")

Die Menge A ist der **Definitionsbereich** (Definitionsmenge), die Menge B der **Zielbereich** (Zielmenge, Cobereich, Wertevorrat) und die Menge W der **Bildbereich** (Wertebereich, Wertemenge) der Funktion f.

b ist das zum Element a gehörige **Bildelement** (Funktionswert).

Bsp.: 1. A = Menge aller Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: A → B
a → b = w(a) = Offizielle Wohnsitzgemeinde von a



2. A = Menge aller Gebäude der Stadt Chur
B = {500, 501, 502, 503, ..., 2003, 2004, 2005, 2006}

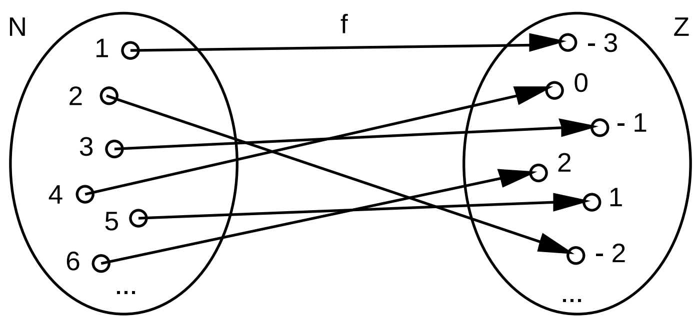
e: A → B
g → j = e(g) = Jahr der Einweihung von g

3. A = B = Menge aller Punkte einer Ebene

S_g: A → A
P → P' = S_g(P) = Bildpunkt von P bezüglich einer Geradenspiegelung an der Geraden g

4. A = N (= Menge der natürlichen Zahlen)
B = Z (= Menge der ganzen Zahlen)

f: N → Z
n → y = f(n) = n - 4



5. A = R_0^+ (= Menge der positiven reellen Zahlen inklusive 0)
B = R (= Menge der reellen Zahlen)

f: R_0^+ → R
x → $y = f(x) = \sqrt{x}$

6. A = B = R

p: R → R
x → $y = p(x) = \frac{x^3-3}{2x^2+1}$

Darstellung einer Funktion

Pfeildiagramm

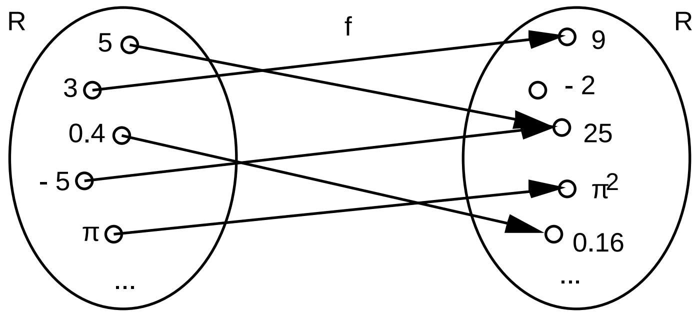


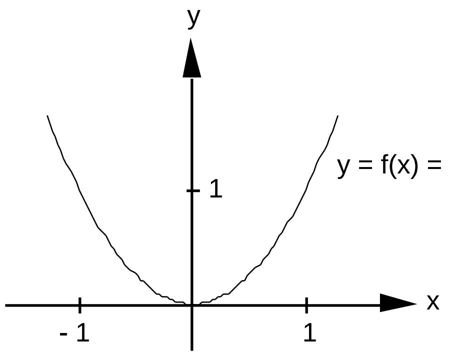
Tabelle (Wertetabelle)

x	y
1	1
3	9
5	25
- 5	25
0.4	0.16
...	...

Funktionsvorschrift (Funktionsgleichung)

$$
\begin{array}{llll}
f: & R & \rightarrow & R \\
 & x & \rightarrow & y = f(x) = x^2
\end{array}
$$

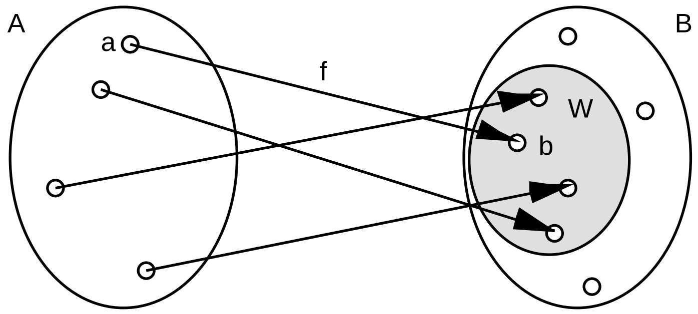
Graf



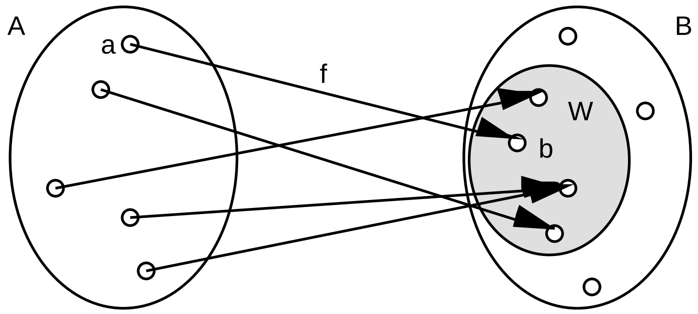
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **injektiv**, falls jedes Element b W Bildelement eines **einzigen** Elementes a A ist.

Injektive Funktion

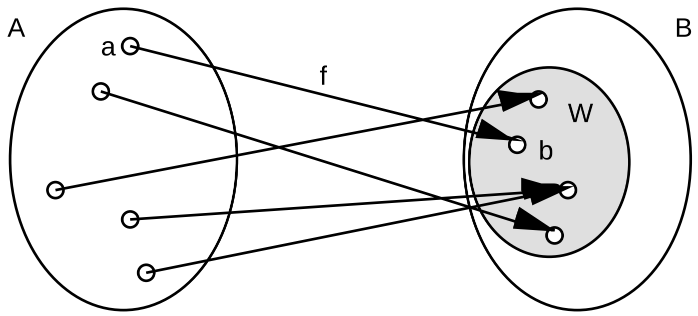


Nicht-injektive Funktion

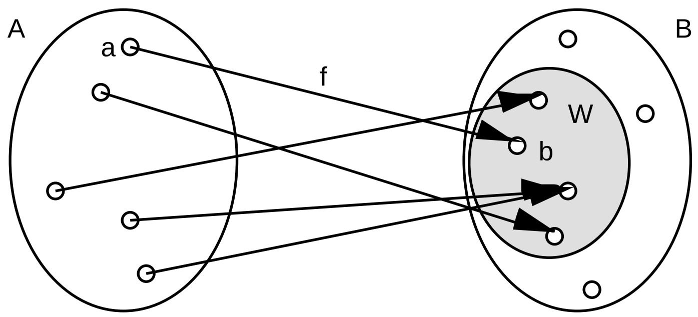


Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **surjektiv**, falls **jedes** Element b B als Bildelement auftritt, d.h. falls W = B.

Surjektive Funktion

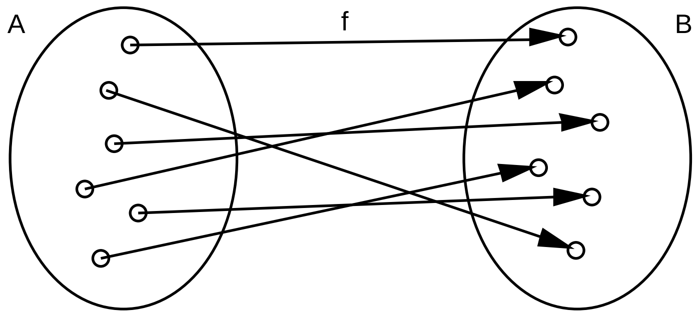


Nicht-surjektive Funktion



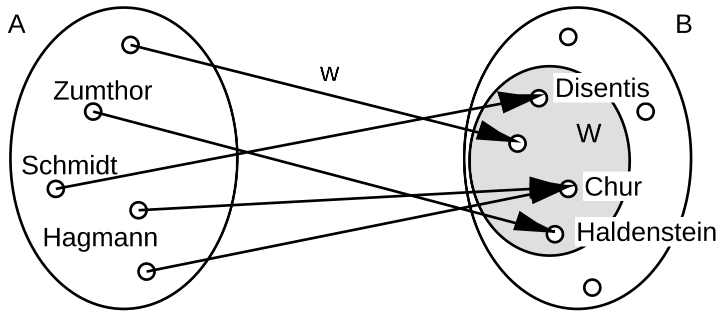
Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **bijektiv**, falls sie **sowohl injektiv als auch surjektiv** ist.

Bijektive Funktion



Bsp.: 1. A = Menge aller Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: A → B
a → b = w(a) = Offizielle Wohnsitzgemeinde von a



nicht injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

2. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x) = -x$

injektiv, surjektiv bijektiv

3. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

nicht injektiv, surjektiv nicht bijektiv

4. f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

5. f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
$x \rightarrow y = f(x) = x^2$

injektiv, surjektiv bijektiv

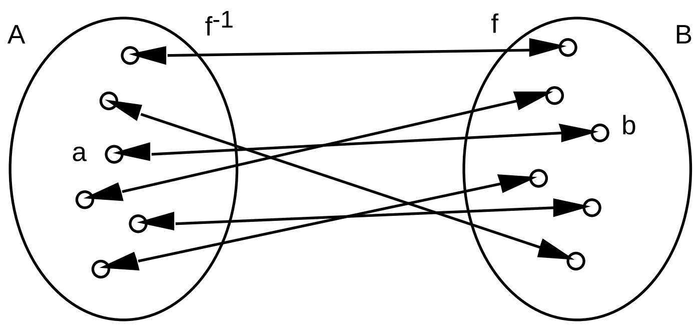
Umkehrfunktion

Def.: Gegeben sei die bijektive Funktion

$$f: \quad A \rightarrow B$$
$$\quad a \rightarrow b = f(a)$$

Die **Umkehrfunktion** f^{-1} ordnet jedem Element b B dasjenige Element a A zu, welches durch die Funktion f dem Element b B zugeordnet wird.

$$f^{-1}: \quad B \rightarrow A$$
$$\quad b \rightarrow a = f^{-1}(b)$$



Bsp.: 1. Ausverkauftes Kino

A = Menge aller Kinobesucher
B = Menge aller Sitzplätze

$$f: \quad A \rightarrow B$$
$$\quad x \rightarrow y = f(x) \text{ = Sitzplatz von Kinobesucher } x$$

$$f^{-1}: \quad B \rightarrow A$$
$$\quad y \rightarrow x = f^{-1}(y) \text{ = Kinobesucher auf Sitzplatz } y$$

2. A = Z
B = {..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...}

$$f: \quad A \rightarrow B$$
$$\quad x \rightarrow y = f(x) = 2x$$

$$f^{-1}: \quad B \rightarrow A$$
$$\quad y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$$

3.

$$f: \quad R_0^+ \rightarrow R_0^+$$
$$\quad x \rightarrow y = f(x) = x^2$$

$$f^{-1}: \quad R_0^+ \rightarrow R_0^+$$
$$\quad y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$