

Übung 11 Funktionstypen Exponential-, Logarithmusfunktion (1)

Lernziele

- den zeitlichen Verlauf einer exponentiell wachsenden oder fallenden Grösse mit einer Exponentialfunktion beschreiben können.
- die Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion beurteilen können.
- verstehen, dass jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e ausgedrückt werden kann.
- verstehen, dass die relative Änderung einer sich zeitlich exponentiell veränderlichen Grösse in gleichen Zeitbereichen gleich ist.
- einfachere Logarithmen von Hand berechnen können.

Aufgaben

1. Ein Kapital K_0 wird auf einem Sparkonto einer Bank bei einem jährlichen Zinssatz p angelegt.
 - a) Zeigen Sie, dass der zeitliche Verlauf des Kapitals $K(t)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.
 - b) Das Anfangskapital sei $K_0 = 1000$ Fr. und der Zinssatz $p = 0.5\%$. Bestimmen Sie das Kapital nach 5 Jahren.

2. Betrachten Sie die Exponentialfunktion
$$f: A \rightarrow B, x \mapsto y = f(x) = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$$
 - a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f .
 - b) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von \mathbb{R} , so dass f bijektiv wird.
 - c) Skizzieren Sie die Grafen der (nun bijektiven) Funktion f und deren Umkehrfunktion
$$f^{-1}: B \rightarrow A, x \mapsto y = f^{-1}(x) = \dots$$

3. Die Anzahl der radioaktiven Atomkerne in einem Präparat nimmt exponentiell ab. Zu Beginn des Experimentes sind $5.12 \cdot 10^{20}$ radioaktive Atomkerne vorhanden. Nach 5 Stunden hat es noch deren $1.5625 \cdot 10^{16}$.
Bestimmen Sie die Anzahl radioaktiver Atomkerne, welche 8 Stunden nach Beginn des Experimentes noch vorhanden sind.

4. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke von Hand:
 - a) $\lg(10)$
 - b) $\lg(10'000)$
 - c) $\log_2(32)$
 - d) $\log_5(125)$
 - e) $\ln(e^4)$
 - f) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$
 - g) $\log_a(a)$
 - h) $\log_a(a^x)$
 - i) $\log_a(1)$
 - j) $\log_a(\sqrt{a})$
 - k) $a^{\log_a(x)} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$
 - l) $e^{-\ln(e/2)}$

5. Der zeitliche Verlauf einer Grösse N , die exponentiell wächst oder fällt, kann mit Hilfe der Exponentialfunktion ausgedrückt werden:

$$N(t) = N_0 a^t \quad \text{wobei: } t = \text{Zeit}$$
$$N(t) = \text{Grösse } N \text{ zum Zeitpunkt } t$$
$$N_0 = \text{Grösse } N \text{ zum Zeitpunkt } t = 0$$

exponentielles Wachsen, falls $a > 1$
(Bsp.: Kapital auf Bankkonto, Bakterienkultur)

exponentielles Fallen, falls $0 < a < 1$
(Bsp.: Radioaktiver Zerfall)

In den Naturwissenschaften und in der Technik wird ein exponentieller Verlauf meistens durch die Exponentialfunktion mit der Basis e ausgedrückt:

$$N(t) = N_0 e^{kt} \quad (\text{exponentielles Wachsen}) \quad \text{bzw.}$$
$$N(t) = N_0 e^{-kt} \quad (\text{exponentielles Fallen})$$

- a) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Wachstums tatsächlich zu jedem $a > 1$ ein $k > 0$ finden kann, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $a^t = e^{kt}$
Drücken Sie k durch a aus.
- b) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Fallens tatsächlich zu jedem a ($0 < a < 1$) ein $k > 0$ finden kann, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $a^t = e^{-kt}$
Drücken Sie k durch a aus.
6. In der Aufgabe 1 wurde festgestellt, dass der zeitliche Verlauf eines Kapitals $K(t)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.
Gemäss Aufgabe 5 kann jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e und dem Parameter k ausgedrückt werden.
Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf des Kapitals $K(t)$ durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e , und bestimmen Sie den Wert des Parameters k für den Zinssatz $p = 0.5\%$.
7. Der mittlere Luftdruck in der Erdatmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe über Meer näherungsweise exponentiell ab:
$$p(h) = p_0 e^{-kh} \quad \text{wobei: } h = \text{Höhe über Meer}$$
$$p(h) = \text{mittlerer Luftdruck auf der Höhe } h$$
$$p_0 = \text{mittlerer Luftdruck auf Meereshöhe} = 1013 \text{ hPa}$$

Auf dem Mount Everest ($h = 8848 \text{ m}$) beträgt der mittlere Luftdruck noch 335 hPa.
Bestimmen Sie den mittleren Luftdruck in Chur ($h = 593 \text{ m}$).
8. Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl N der radioaktiven Kerne exponentiell ab:
$$N(t) = N_0 e^{-kt} \quad (k > 0)$$

Zeigen Sie, dass die Zeitspannen, in welchen sich N jeweils halbiert, alle gleich lang sind.
Zu zeigen ist also, dass es - von jedem beliebigen Zeitpunkt aus gesehen - immer gleich lang dauert, bis N wieder auf den halben Wert abgesunken ist.

Lösungen

1. a) $K(t) = K_0 (1+p)^t$, $[t] = \text{Jahre}$

b) $K(5) = 1000 (1+0.005)^5 \text{ Fr.} = 1025.25 \text{ Fr.}$

2. a) injektiv, nicht surjektiv nicht bijektiv

b) $A = \mathbb{R}$
 $B = \mathbb{R}^+$

c) ...

3. $N(8h) = 3.05 \cdot 10^{13}$

4. a)	1	b)	4	c)	5	d)	3
e)	4	f)	-4	g)	1	h)	x
i)	0	j)	$\frac{1}{2}$	k)	x	l)	$\frac{2}{e}$

5. a) $= \ln(a)$

b) $= -\ln(a)$

6. $K(t) = K_0 e^{-t}$

$= \ln(1+p) = 0.0049\dots$

7.
$$= \frac{-\ln(p(h)/p_0)}{h} = \frac{-\ln(335 \text{ hPa}/1013 \text{ hPa})}{8848 \text{ m}} = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ 1/m}$$

$p(593 \text{ m}) = 941 \text{ hPa}$

8. ...