Übung 10 Funktionstypen
Trigonometrische Funktionen und Gleichungen, Arkusfunktionen

Lernziele

- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion kennen und verstehen.
- die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion bestimmen können.
- den Grafen einer einfacheren trigonometrischen Funktion skizzieren können.
- die Lösungen einer einfacheren trigonometrischen Gleichung von Hand bestimmen können.
- die Umkehrfunktion einer einfacheren trigonometrischen Funktion bestimmen können.

Aufgaben

1. Betrachten Sie die Sinus-Funktion f und die aus ihr abgeleiteten Funktionen, f_1, f_2, f_3 und f_4:

$f: R \to R,\ x \to y = f(x) = \sin(x)$

$f_1: R \to R,\ x \to y = f_1(x) := \sin(x+b) \quad (b \quad R)$
$f_2: R \to R,\ x \to y = f_2(x) := \sin(x) + C \quad (C \quad R)$
$f_3: R \to R,\ x \to y = f_3(x) := \sin(a \cdot x) \quad (a \quad R_0^+)$
$f_4: R \to R,\ x \to y = f_4(x) := A \cdot \sin(x) \quad (A \quad R_0^+)$

a) Geben Sie die Amplitude A und die Periode p von f an.

b) Vergleichen Sie die Funktionen f und f_1:

i) Skizzieren Sie die Grafen von f und f_1 ins gleiche Koordinatensystem
- für $b = -\frac{\pi}{2}$
- für ein allgemeines b

ii) Bestimmen Sie die Amplitude A, die Periode p und die Phasenverschiebung x_0 von f_1.

c) Vergleichen Sie die Funktionen f und f_2:

i) Skizzieren Sie die Grafen von f und f_2 ins gleiche Koordinatensystem
- für C = 1
- für ein allgemeines C

ii) Bestimmen Sie die Amplitude A, die Periode p und die Phasenverschiebung x_0 von f_2.

d) Vergleichen Sie die Funktionen f und f_3:

i) Skizzieren Sie die Grafen von f und f_3 ins gleiche Koordinatensystem
- für a = 2
- für ein allgemeines a

ii) Bestimmen Sie die Amplitude A, die Periode p und die Phasenverschiebung x_0 von f_3.

e) Vergleichen Sie die Funktionen f und f_4:

i) Skizzieren Sie die Grafen von f und f_4 ins gleiche Koordinatensystem
- für A = 2
- für ein allgemeines A

ii) Bestimmen Sie die Amplitude A, die Periode p und die Phasenverschiebung x_0 von f_4.

2. Papula: 303/5, 303/6, 303/4

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen:

a) $\sin(x) = a$ $(-1 \le a \le 1)$

b) $\cos(x) = b$ $(-1 \le b \le 1)$

c) $\tan(x) = c$ (c R)

d) $\cot(x) = d$ (d R)

4. Papula: 305/16

5. Bearbeiten Sie für die beiden Funktionen der Aufgabe Papula 303/6 die folgenden Teilaufgaben:

i) Legen Sie den Definitionsbereich A und den Zielbereich B so fest, dass die Funktion bijektiv wird.

ii) Skizzieren Sie den Grafen der bijektiven Funktion.

iii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

iv) Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion.

Lösungen

1. a) $A = 1$ $\quad p = 2\pi$

   b) i) ...

   ii) $A = 1$ $\quad p = 2\pi$ $\quad x_0 = -b$

   c) i) ...

   ii) $A = 1$ $\quad p = 2\pi$ $\quad x_0 = 0$

   d) i) ...

   ii) $A = 1$ $\quad p = \frac{2\pi}{a}$ $\quad x_0 = 0$

   e) i) ...

   ii) $A = A$ $\quad p = 2\pi$ $\quad x_0 = 0$

2. siehe Papula

3. a) $x_{1k} = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$
   $x_{2k} = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$

   b) $x_{1k} = \arccos(b) + k \cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$
   $x_{2k} = -\arccos(b) + k \cdot 2\pi \;\; (k \;\; Z)$

   c) $x_k = \arctan(c) + k \cdot \pi \;\; (k \;\; Z)$

   d) $x_k = \operatorname{arccot}(d) + k \cdot \pi \;\; (k \;\; Z)$

4. siehe Papula

5. a) i) $A = \left\{ x \;\; R \,\middle|\, -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} \le x \le -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} \right\}$ $\quad B = \{y \;\; R \mid -4 \le y \le 4\}$

   ii) ...

   iii) $f^{-1}: B \to A,\; x \to y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left(\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - 2\right)$

   iv) ...

   b) i) $A = \left\{ x \;\; R \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \right\}$ $\quad B = \{y \;\; R \mid -2 \le y \le 2\}$

   ii) ...

   iii) $f^{-1}: B \to A,\; x \to y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\arccos\left(\frac{x}{2}\right) + \pi\right)$

   iv) ...