Übung 9 Funktionstypen
Potenz-, Wurzel-, Polynomfunktion, Gebrochenrationale Funktion

Lernziele

- den Grafen einer Potenz-, Wurzelfunktion skizzieren können.
- die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Potenz-, Wurzelfunktion beurteilen können.
- die Umkehrfunktion einer bijektiven Potenz-, Wurzelfunktion bestimmen können.
- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf den Grafen einer Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen den Grafen einer bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion kennen und verstehen.
- aus dem Grafen einer Funktion charakteristische Eigenschaften der Funktion herauslesen können.
- charakteristische Eigenschaften einer Polynomfunktion kennen.
- charakteristische Eigenschaften einer gebrochenrationalen Funktion kennen.

Aufgaben

Potenz-, Wurzelfunktion

1. Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, den Grafen der

   a) Potenzfunktion $f: R \to R,\ x \to y = f(x) = x^n$ für n = 2, 3, 4 und 5.

   b) Potenzfunktion $f: R \backslash \{0\} \to R,\ x \to y = f(x) = x^{-n}$ für n = 1, 2, 3 und 4.

   c) Wurzelfunktion $f: R^+ \to R,\ x \to y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ für n = 2, 3, 4 und 5.

2. Betrachten Sie die Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten:

   $f: A \to B,\ x \to y = f(x) = x^n \qquad n \quad N$

   a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f in Abhängigkeit von n für A = B = R.

   b) Wählen Sie für A und B "grösstmögliche" Teilmengen von R, so dass die Funktion f bijektiv wird.

   c) Bestimmen Sie für n = 2, 3 und 4 die Umkehrfunktion f^{-1}: $B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x)$.

   d) Skizzieren Sie für n = 2, 3 und 4 den Grafen der Umkehrfunktion f^{-1}.

3. Betrachten Sie die Potenzfunktion mit rationalem Exponenten:

   $f: R^+ \to R,\ x \to y = f(x) = x^{m/n} \qquad m \quad Z,\ n \quad N$

   a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f.

   b) Beurteilen Sie, ob und gegebenenfalls wie man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich von f einschränken müsste, damit f bijektiv wird.

   c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}: ... → ... , $x \to y = f^{-1}(x)$.

4. Betrachten Sie die Potenzfunktionen

   $f:\ R \to R,\ x \to y = f(x) = a(x-x_0)^n + y_0 \qquad n \quad N,\ a \quad R\backslash\{0{,}1\},\ x_0 \quad R\backslash\{0\},\ y_0 \quad R\backslash\{0\}$
   $g: R\backslash\{x_0\} \to R,\ x \to y = g(x) = a(x-x_0)^{-n} + y_0 \qquad n \quad N,\ a \quad R\backslash\{0{,}1\},\ x_0 \quad R\backslash\{0\},\ y_0 \quad R\backslash\{0\}$

   Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen von f und g. Unterscheiden Sie dabei die Fälle n gerade und n ungerade.

   Hinweis:
   Gehen Sie von den Grafen aus, die Sie in der Aufgabe 1 skizziert haben.

Polynomfunktion

5. Betrachten Sie die Polynomfunktion (ganzrationale Funktion)

$$f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad n \quad N,\ a_n \neq 0$$

Zeichnen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE die Grafen einiger Polynomfunktionen, und bearbeiten Sie dabei die folgenden Aufgabenstellungen:

a) Was sind charakteristische Eigenschaften einer Polynomfunktion des Grades n?
Gesucht sind Eigenschaften, die zwar von n, jedoch nicht vom Wert der Koeffizienten a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 abhängen.

b) Wieviele Nullstellen hat eine Polynomfunktion n-ten Grades maximal?

Gebrochenrationale Funktion

6. Betrachten Sie die gebrochenrationale Funktion

$$f: A \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = \frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0} \qquad m \quad N,\ n \quad N,\ a_m \neq 0,\ b_n \neq 0$$

a) Geben Sie für den Definitionsbereich A die "grösstmögliche" Teilmenge von R an.

b) Zeichnen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE die Grafen einiger gebrochenrationaler Funktionen. Unterscheiden Sie dabei zwischen echt und unecht gebrochenrationalen Funktionen.

Finden Sie charakteristische Eigenschaften von echt und unecht gebrochenrationalen Funktionen.

Lösungen

1. a) ...

   b) ...

   c) ...

2. a) n ungerade: f injektiv, f surjektiv f bijektiv
   n gerade: f nicht injektiv, f nicht surjektiv f nicht bijektiv

   b) n ungerade: $A = B = R$
   n gerade: $A = B = R_0^+$

   c) n = 2: $f^{-1}: R_0^+ \rightarrow R_0^+,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

   n = 3: $f^{-1}: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt[3]{-x} & (x < 0) \end{cases}$

   n = 4: $f^{-1}: R_0^+ \rightarrow R_0^+,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$

   d) ...

3. a) f injektiv, f nicht surjektiv f nicht bijektiv

   b) Definitionsbereich = Zielbereich = R^+

   c) $f^{-1}: R^+ \rightarrow R^+,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = x^{n/m}$

4. ...

5. a) ...

   b) maximal n Nullstellen

6. a) $A = R\backslash\{x_1, x_2, ..., x_N\}$, wobei $x_1, x_2, ..., x_N$ die N Nullstellen des Nennerpolynoms sind $(N \leq n)$

   b) ...