Übung 4 Vektoren
Skalarprodukt, Vektorprodukt

Lernziel

- das Skalar- und das Vektorprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

1. Betrachten Sie die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_y \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die y-Komponente a_y des Vektors $\vec{a}$ und die x-Komponente b_x des Vektors $\vec{b}$, damit die folgenden beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

· $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Rechteck auf.

· Jeder senkrecht zum Rechteck stehende Vektor hat die Eigenschaft, dass er parallel zur y-z-Ebene liegt.

2. Gegeben sei das Dreieck ABC mit A (-1 | 0 | 2), B (-2 | 2 | 0) und C (t | 1+t | 4-t) ($t \in \mathbb{R}$).

Bestimmen Sie alle möglichen Werte für t, so dass der Winkel β bei B 45° beträgt.

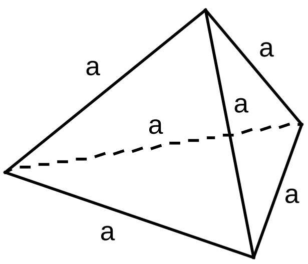
3. Gegeben sei eine Kugel mit dem Mittelpunkt M(12|5|6) und dem Radius r = 13 sowie eine Ebene ε, welche durch die Punkte A(-7|-1|13), B(-4|-3|9) und C(-1|-7|-3) geht.

a) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht zur Ebene ε ist.

b) Berechnen Sie allfällige Durchstosspunkte der drei Koordinatenachsen mit der Kugel.

c) Es gibt eine Gerade durch M, welche senkrecht auf der Ebene ε steht.
Wo durchstösst diese Gerade die Kugeloberfläche?

4. Gegeben sei ein gleichseitiger Tetraeder ABCD mit der Kantenlänge a. Dies ist eine Pyramide, bei der alle vier Flächen ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a bilden:



Die Grundfäche des Tetraeders liege so auf der x-y-Ebene, dass die Ecke A auf der x-Achse und die Spitze D auf der z-Achse liegt. Die Kantenlänge a sei bekannt.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und D.
Drücken Sie die Koordinaten durch die bekannte Kantenlänge a aus.

b) (siehe Seite 2)

b) Die Koordinaten der Punkte A, B, C und D seien nun bekannt.

Ein Lichtstrahl treffe so auf die verspiegelte Aussenseite der Fläche ABD auf, dass er dort in sich selber reflektiert werde.

Nehmen Sie nun an, Sie müssten die Richtung dieses Lichtstrahles angeben. Wie würden Sie vorgehen?

Erstellen Sie eine Anleitung dafür, wie man die Richtung des Lichtstrahls bestimmen müsste.

In Ihrer Anleitung sollten die einzelnen Vorgehensschritte in Stichworten oder ganzen deutschen Sätzen aufgeführt sein. Zudem sollte die Anleitung so detailliert und verständlich sein, dass eine Kollegin oder ein Kollege Ihrer Klasse in der Lage wäre, mit Hilfe Ihrer Anleitung die Richtung des Lichtstrahls zu bestimmen.

Sie sollen also die Richtung nicht wirklich bestimmen, sondern lediglich erklären, wie Sie sie bestimmen würden.

Lösungen

1. $a_y = -2$, $b_x = 26$

2. ...

3. a) $\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

   b) x-Achse: Durchstosspunkte $X_1\left(6\left(2+\sqrt{3}\right) \mid 0 \mid 0\right)$, $X_2\left(6\left(2-\sqrt{3}\right) \mid 0 \mid 0\right)$

   y-Achse: weder Durchstosspunkte noch Berührungspunkt

   z-Achse: Berührungspunkt Z(0|0|6)

   c) $P_1(16|17|3)$, $P_2(8|-7|9)$

4. a) $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a \mid 0 \mid 0\right)$ $B\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}a \mid \frac{1}{2}a \mid 0\right)$ $C\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}a \mid -\frac{1}{2}a \mid 0\right)$ $D\left(0 \mid 0 \mid \sqrt{\frac{2}{3}}a\right)$

   b) Idee:
   Die Richtung des Lichtstrahls ist gleich der Richtung eines von aussen auf die Seitenfläche ABD hin gerichteten Normalenvektors.

   Vorgehen:
   1. Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ bestimmen.
   2. Vektor $\vec{n} = \vec{AD} \times \vec{AB}$ bestimmen.
      Die Richung von $\vec{n}$ ist gleich der Richtung des Lichtstrahls.