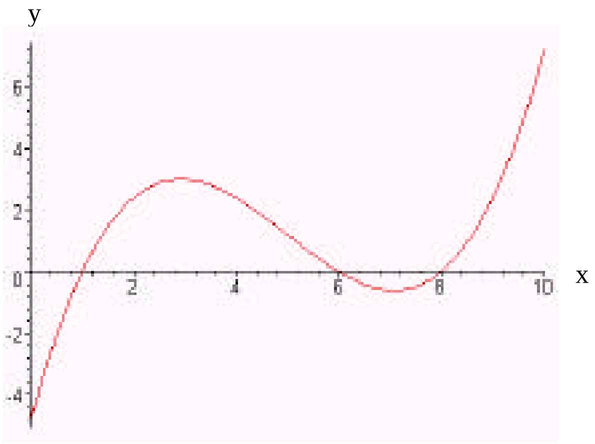
Repetitions-Übung 3 Differentialrechnung, Integralrechnung

Aufgaben

1. Der Graf einer Funktion f: $x \to y = f(x)$ sieht wie folgt aus:



Schätzen Sie den Wert der folgenden bestimmten Integrale ab:

a) $\int_4^6 f(x)\,dx$ b) $\int_0^2 f(x)\,dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ b) $\int \cos(\ln(x))\,dx$

c) $\int_{-1}^{1} (t^2x - x^2t)\,dx$ d) $\int_{-1}^{1} (t^2x - x^2t)\,dt$

3. Gegeben sind die Funktion f und deren Ableitung f':

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x) = (x-3)^2 - 1$

f': $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f'(x) = 2(x-3)$

a) Bestimmen Sie die Stelle x_0, an welcher die Funktion f ihr Minimum besitzt.

b) Überprüfen Sie von Hand, d.h. ohne Integral-Tabelle sondern durch Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten, dass die Ableitung tatsächlich $f'(x) = 2(x-3)$ lautet.

4. Gegeben ist die Funktion g:

g: $x \to y = g(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x-3}}$

Bestimmen Sie g'(0).

5. Gegeben sind die Funktion f und ihre ersten drei Ableitungen f', f'', f''':

$$f(x) = \frac{x^3}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} \qquad f''(x) = \frac{2x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3} \qquad f'''(x) = -\frac{48}{(x-2)^4}$$

Bestimmen Sie alle Stellen x, an welchen die Funktion f

a) eine Nullstelle hat.

b) ein relatives Maximum hat.

c) ein relatives Minimum hat.

d) einen Wendepunkt hat.

6. Gegeben sind zwei Kurven k_1 und k_2 in der xy-Ebene:

k_1: $y = \frac{1}{4}x(x-4)$

k_2: $y = -\frac{1}{9}(x-2)^2 + \frac{9}{4}$

Die beiden Kurven k_1 und k_2 begrenzen ein Flächenstück.

Bestimmen Sie den Inhalt dieses Flächenstückes.

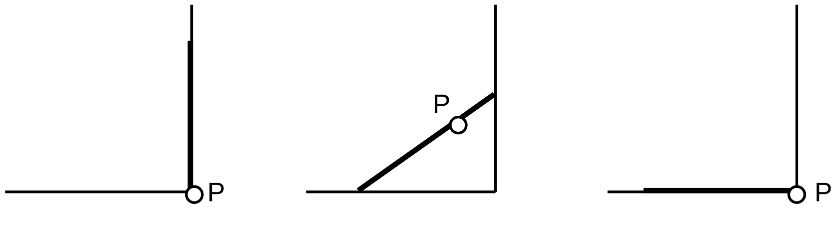
7. Ein grosses Baugebiet soll in lauter gleiche, rechteckige Grundstücke mit möglichst kleiner Fläche eingeteilt werden.

Auf jedem dieser Grundstücke soll ein rechteckiges Gebäude der Grundfläche 100 m^2 errichtet werden können. Das örtliche Baugesetz schreibt dabei vor, dass der Mindestabstand eines Gebäudes von der Grundstückgrenze nach Norden, Westen und Osten hin 6 m und nach Süden hin 8 m betragen muss. Die Begrenzungslinien der Grundstücke und der Gebäude sollen parallel zu den Himmelsrichtungen laufen.

Bestimmen Sie die Abmessungen eines einzelnen Grundstücks, damit die genannte Forderung nach minimaler Fläche erfüllt wird.

8. Eine Leiter der Länge L steht senkrecht an einer Wand.

Ein beweglicher Punkt P befindet sich am Anfang (t=0) am unteren Ende der Leiter und wandert mit einer konstanten Geschwindigkeit v die Leiter empor. Gleichzeitig gleitet das untere Ende der Leiter mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit v dem Boden entlang:



Situation am Anfang — Situation am Schluss

Zu welchem Zeitpunkt t (ausgedrückt durch die Platzhalter L und v) hat der Punkt P den maximalen Abstand

a) von der Wand?

b) vom Boden?

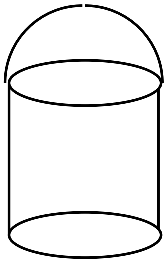
9. Eine Kurve k in der xy-Ebene ist gegeben durch die Gleichung $y = \frac{x^2}{4} - 3$.

Wird die Kurve k an der Geraden y = x , d.h. an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten gespiegelt, so begrenzen die Kurve k und ihr Spiegelbild ein Flächenstück, ein "2-Eck".

a) Berechnen Sie den Winkel, unter welchem sich die Kurve k und ihr Spiegelbild im ersten Quadranten schneiden.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des "2-Ecks".

10. Beim abgebildeten (modernen?) Gebäude besteht der Wohnraum aus einem Zylinder und der Estrich aus einer aufgesetzten Halbkugel:



Die Fassade besteht aus der Oberfläche des Zylinders (ohne Grund- und Deckfläche), das Dach aus der Oberfläche der Halbkugel.

Die Kosten pro Flächeneinheit betragen für die Fassade k_1 (in Fr./m^2), für das Dach k_2 (in Fr./m^2).

a) Wie muss man das Haus dimensionieren, damit bei vorgegebenem Wohnraum V_1 (in m^3) die Gesamtkosten für die Fassade und das Dach minimal werden?

b) Wie muss man das Haus dimensionieren, damit der Wohnraum maximal wird, wenn die Gesamtkosten K (in Fr.) für die Fassade und das Dach vorgegeben sind?

Lösungen

1. a) $\int_4^6 f(x)\,dx \approx 2$ b) $\int_0^2 f(x)\,dx \approx -1.5$

2. a) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$ b) $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))\right) + C$

   c) $-\frac{2}{3}t$ d) $\frac{2}{3}x$

3. a) $x_0 = 3$ b) ...

4. $g'(0) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$

5. a) $x = 0$ b) kein relatives Maximum

   c) $x = 3$ d) $x = 0$ (Sattelpunkt)

6. $A = 13$

7. B := nutzbare Baufläche = 100 m^2
   n := Grenzabstand Nord/West/Ost = 6 m
   s := Grenzabstand Süd = 8 m
   a := Länge Grundstück
   b := Breite Grundstück

$$a = \sqrt{\frac{B(n+s)}{2n}} + n + s = 24.80 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{\frac{2Bn}{n+s}} + 2n = 21.26 \text{ m}$$

8. a) $t = \frac{L}{2v}$ b) $t = \frac{L}{\sqrt{2}\,v}$

9. a) $\phi = 2\arctan(3) - \frac{\pi}{2} = 0.927... = 53.1...°$ b) $A = \frac{128}{3} = 42.6...$

10. r := Radius des Zylinders
    h := Höhe des Zylinders

    a) $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}\frac{k_1}{k_2}V_1}$ b) $r = \sqrt{\frac{1}{6\pi}\frac{1}{k_2}K}$

    $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 V_1}$ $h = \frac{1}{k_1}\sqrt{\frac{2}{3\pi}K\,k_2}$