Repetitions-Übung 2 Analytische Geometrie, Differentialrechnung

Aufgaben

Analytische Geometrie

1. Die Parameterdarstellung einer Geraden g und die Koordinatendarstellung einer Ebene E lauten wie folgt:

$$g: \quad \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E: \quad 2x + 3y + 4z - 6 = 0$$

Bestimmen Sie den Durchstosspunkt D der Geraden g mit der Ebene E.

2. Gegeben sind die vier Punkte A, B, C und D:

A (2 | -3 | 2) B (-1 | 3 | 6) C (5 | -5 | 0) D (6 | -7 | 15)

Bestimmen Sie den Fusspunkt D' des Lotes von D auf die Ebene E, welche durch A, B und C verläuft.

3. Die Gleichungen der beiden Ebenen E_1 und E_2 lauten wie folgt:

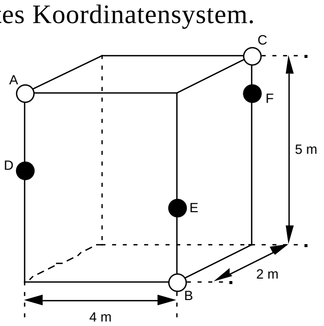
E_1: $4x - 2y - z - 12 = 0$
E_2: $2x + 2y - 5z + 24 = 0$

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

b) Welcher Punkt der Schnittgeraden liegt dem Ursprung am nächsten?

4. In einen quaderförmigen Raum werden zwei Glasplatten eingefügt. Die eine Platte soll durch die Punkte A, B und C verlaufen, die andere durch die Punkte D, E und F. D liegt auf 3/5, E auf 2/5 und F auf 4/5 der Raumhöhe.

Stellen Sie die Schnittgerade der beiden Glasplatten analytisch dar. Wählen Sie dazu selber ein geeignetes Koordinatensystem.



5. Die folgenden drei Geraden g_1, g_2 und g_3 liegen windschief im Raum:

$$g_1: \quad \vec{r}(P) = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g_2: \quad \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_3: \quad \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Gerade g, welche parallel zu g_3 verläuft und die beiden Geraden g_1 und g_2 schneidet.

6. Gegeben ist die Ebene E und der Punkt P:

E: $x + 4y - 3z + 9 = 0$ P (0 | - 5 | 5)

Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Spiegelpunkt P'.

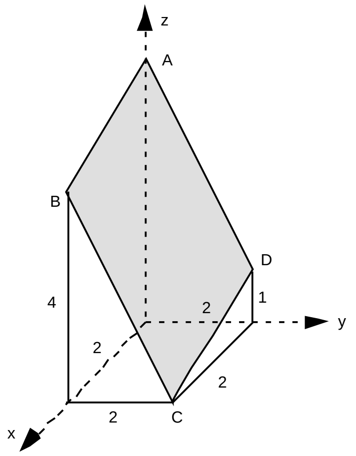
Bestimmen Sie die Koordinaten von P'.

7. Eine Pyramide hat als Grundfläche das Dreieck ABC und die Spitze D:

A (- 2 | - 1 | - 1) B (2 | 1 | 0) C (3 | 6 | - 2) D (5 | - 4 | 10)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, der von C und D gleiche Abstände hat und dessen Projektion auf die Grundfläche ABC der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

8. Gegeben ist eine Fläche ABCD:



Ein Wassertropfen wird in der Ecke A auf die Fläche ABCD gesetzt.

Bestimmen Sie den Punkt P, in welchem der Tropfen die Fläche ABCD verlässt.

Differentialrechnung

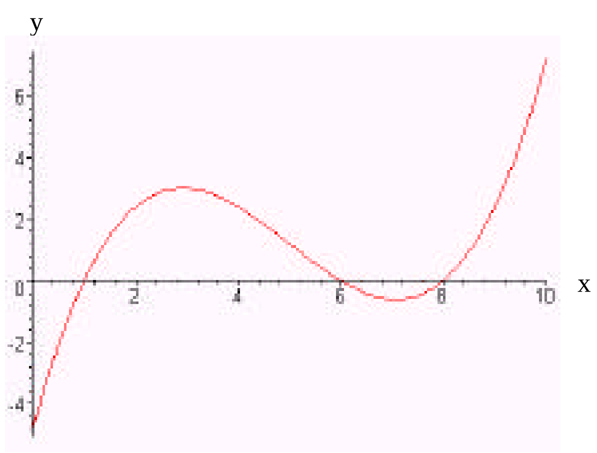
9. Gegeben sind die beiden Funktion f und g:

f: $x \rightarrow y = f(x) = 2x^2+4x+1$

g: $x \rightarrow y = g(x) = ax + \frac{1}{2} \quad (a \quad R \setminus \{0\})$

Für welche(n) Wert(e) von a berühren sich die Grafen von f und g?

10. Der Graf einer Funktion f: $x \rightarrow y = f(x)$ sieht wie folgt aus:



a) Lesen Sie aus dem Grafen alle Stellen x heraus, an welchen gilt: $f'(x) = 0$

b) Skizzieren Sie den Grafen der Ableitung $f': x \rightarrow f'(x)$

11. Gegeben ist die Funktion f:

$$f: \qquad x \rightarrow y = f(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^3} \qquad (a, b \quad R)$$

a) Bestimmen Sie die Werte der Konstanten a und b, so dass beim Punkt P(2|1) des Grafen von f ein relatives Maximum liegt.

b) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, was für Bedingungen die Konstanten a und b erfüllen müssen, damit die Funktion f mindestens einen Wendepunkt besitzt.

Lösungen

1. $D\left(\frac{2}{15} \,\middle|\, \frac{14}{3} \,\middle|\, -\frac{31}{15}\right)$

2. D' (2 | -1 | 3)

3. a) g: $\vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) P (2 | -4 | 4)

4. ...

5. g: $\vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 14/3 \\ -7/6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. P' (2 | 3 | - 1)

7. $P\left(-\frac{16}{3} \,\middle|\, \frac{25}{3} \,\middle|\, \frac{35}{3}\right)$

8. $P\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, 2 \,\middle|\, \frac{3}{4}\right)$

9. $a_1 = 2$
   $a_2 = 6$

10. a) $x_1 \approx 3$
    $x_2 \approx 7$

    b) ...

11. a) a = 3
    b = 4

    b) $a \cdot b > 0$