Übung 20 Ableitung
Ableitung einer Funktion, Grundfunktionen, Ableitung auf MAPLE

Lernziele

- die Ableitung einer einfachen Funktion direkt aus der Definition der Ableitung von Hand bestimmen können.
- die Ableitung einer Grundfunktion mit Hilfe einer Tabelle bestimmen können.
- die Ableitung einer Funktion mit dem Computerprogramm MAPLE bestimmen können.
- durch das Studium schriftlicher Unterlagen neue Sachverhalte erarbeiten können.
- den Zusammenhang zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion verstehen.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Ableitung f' der Funktion f **direkt**, indem Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten von Hand bestimmen.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = mx + q$ (m R,q R)

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2. Bestimmen Sie die Ableitung f' der Funktion f **mit Hilfe einer Ableitungs-Tabelle** (kopiertes Blatt, oder Buch *Papula*: Tabelle 1, Seiten 313/314).

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = x^{a+1}$, a R c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[7]{x^3}}$ e) $f(x) = x^{1/2}$ f) $f(x) = x^{-5/7}$

g) $f(x) = 5^x$ h) $f(x) = \log_2(x)$ i) $f(x) = \log(x)$

3. Im Computerprogramm MAPLE gibt es die beiden Befehle *D* und *diff*, mit welchen die Ableitung einer Funktion bestimmt werden kann.

a) Finden Sie in MAPLE unter "Hilfe" heraus, wie man die Befehle *D* und *diff* verwendet.

b) Bestimmen Sie mit MAPLE die Ableitung f' der Funktion f:

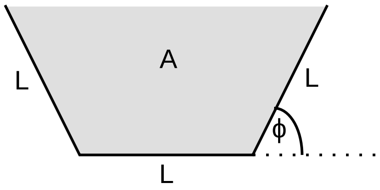
i) f(x) aus der Aufgabe 2

ii) $f(x) = \sin(x)$

iii) $f(x) = \frac{4x^4 - 3x^2}{x^3}$

4. (siehe Seite 2)

4. Betrachten Sie das Beispiel der Wasserrinne aus dem Unterricht (Einführung Differentialrechnung):



Der Neigungswinkel ϕ der Seitenwände soll so gewählt werden, dass die Querschnittsfläche A der Rinne maximal wird.

a) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche A in Abhängigkeit des Winkels ϕ.

b) Fassen Sie A als Funktion von ϕ auf, d.h. $A: \phi \to A(\phi)$.
Zeichnen Sie mit MAPLE den Grafen der Funktion A.

c) Bestimmen Sie mit MAPLE das Maximum der Funktion A:

i) Bestimmen Sie die Ableitung A'.

ii) Bestimmen Sie die Stelle ϕ, für welche gilt: $A'(\phi) = 0$

5. Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *1.2 Ableitung einer Funktion* (Seiten 309 bis 313).

6. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(1) Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist, dann ist sie an der Stelle x_0 differenzierbar.

(2) Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist sie an der Stelle x_0 stetig.

Lösungen

1. a) $f'(x) = 3x^2$
   b) $f'(x) = m$
   c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

2. a) $f'(x) = 5x^4$ b) $f'(x) = (a+1)x^a$ c) $f'(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$
   d) $f'(x) = \frac{32}{7}\sqrt[7]{x^{25}}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ f) $f'(x) = -\frac{5}{7}x^{-12/7}$
   g) $f'(x) = \ln(5)\cdot 5^x$ h) $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)\cdot x}$ i) $f'(x) = \frac{1}{\ln(10)\cdot x}$

3. a) ...
   b) i) ...
      ii) $f'(x) = \cos(x)$
      iii) $f'(x) = 16x^3 + \frac{3}{x^2}$

4. a) $A = L^2 \sin(\phi)\,(1 + \cos(\phi))$
   b) ...
   c) i) $A'(\phi) = L^2\left(\cos(\phi)\,(1 + \cos(\phi)) - \sin^2(\phi)\right)$
      ii) $A'(\phi) = 0$ für $\phi = 60°$

5. ...

6. (1) falsch
   (2) wahr