Übung 18 Grenzwert
Grenzwert einer Funktion

Lernziele

- durch das Studium schriftlicher Unterlagen neue Sachverhalte erarbeiten können.
- verstehen, was der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert einer Funktion ist.
- verstehen, was der Grenzwert einer Funktion ist.
- die folgenden symbolischen Schreibweisen verstehen und korrekt anwenden können:
  $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- einfachere Grenzwerte von Funktionen bestimmen können.

Aufgaben

1. Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *4.2.1 Grenzwert einer Funktion für* $x \to x_0$ (Seiten 168 bis 171).

   Bearbeiten Sie parallel dazu die Aufgaben a) bis d), wenn Sie an den in Klammern bezeichneten Textstellen angelangt sind.

   Fahren Sie jeweils erst weiter, wenn Sie die gestellte Aufgabe bearbeitet und Ihre Lösung mit der "Musterlösung" (siehe Seite 3 dieser Übung 18) verglichen haben.

   a) (Seite 168, nach dem Abschnitt "Annäherung von links", vor dem Abschnitt "Annäherung von rechts")

      Für jede Zahlenfolge $<x_n>$, die von links her gegen die Zahl 2 konvergiert, konvergiert die dazugehörige Zahlenfolge $<f(x_n)>$ gegen den Wert 4.
      Ein Beispiel einer solchen Folge $<x_n>$ wird im Text angegeben.

      Geben Sie ein eigenes Beispiel einer Folge $<x_n>$ an, die ebenfalls von links her gegen den Wert 2 konvergiert.
      Versuchen Sie, Ihre Zahlenfolge mit einem Bildungsgesetz zu beschreiben.

   b) (Seite 169, nach dem Abschnitt "Annäherung von rechts", vor der Definition)

      Für jede Zahlenfolge $<x_n>$, die von rechts her gegen die Zahl 2 konvergiert, konvergiert die dazugehörige Zahlenfolge $<f(x_n)>$ gegen den Wert 4.
      Ein Beispiel einer solchen Folge $<x_n>$ wird im Text angegeben.

      Geben Sie ein eigenes Beispiel einer Folge $<x_n>$ an, die ebenfalls von rechts her gegen den Wert 2 konvergiert.
      Versuchen Sie, Ihre Zahlenfolge mit einem Bildungsgesetz zu beschreiben.

   c) (Seite 170, nach dem Beispiel (2))
      Im Beispiel (2) wird die Funktion $f_1(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$ betrachtet.
      Vergleichen Sie die Funktion $f_1(x)$ mit der Funktion $f_2(x) = x$.

      Betrachten Sie dazu die Grafen der beiden Funktionen.
      Beurteilen Sie zudem, wie weit für die beiden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die folgende Aussage zutrifft:
      "Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert. Sie besitzt an dieser Stelle jedoch einen Grenzwert."

   d) (siehe Seite 2)

d) (Seite 171, nach dem Beispiel (3), vor dem Abschnitt 4.2.2)

Kontrollfragen zum Abschnitt 4.2.1
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen über den Grenzwert einer Funktion f(x) wahr oder falsch sind:

1 Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0.

2 Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 exisiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert.

3 Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide gleich gross sind, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0.

4 Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 nicht existiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 entweder der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert nicht.

5 Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist er gleich gross wie der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle x_0.

6 Wenn die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist, dann existiert an dieser Stelle x_0 der Grenzwert.

7 Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist die Funktion an dieser Stelle x_0 definiert.

2. Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *4.2.2 Grenzwert einer Funktion für* $x \to \pm\infty$ (Seiten 171 bis 173).

3. *Papula*: 298/4, 298/5, 298/6

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{2x+3}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 5/2} \dfrac{5-2x}{2x^2-3x-5}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(a+x)^2-a^2}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a}}{x}$

Lösungen

1. a) z.B. $\langle x_n \rangle = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots, 2 - \frac{1}{n}, \ldots$

   b) z.B. $\langle x_n \rangle = 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \ldots, 2 + \frac{1}{n}, \ldots$

   c) Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ unterscheiden sich nur an der Stelle $x_0 = 2$:

   $f_1(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.
   Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert jedoch: $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x) = 2$

   $f_2(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ definiert und hat dort den Funktionswert $f_2(2) = 2$.
   Auch der Grenzwert für $x \to 2$ existiert: $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x) = 2$

   d)

1	falsch
2	wahr
3	wahr
4	falsch
5	wahr
6	falsch
7	falsch

2. ...

3. siehe *Papula*

4. a) $\frac{1}{2}$

   b) 0

   c) $-\frac{2}{7}$

   d) 6

   e) $2a$

   f) $-\frac{1}{a^2}$