

Übung 15 Kegelschnitte Kreis, (Kugel)

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die Gleichung des Kreises kennen und verstehen.
- aus bekannten Eigenschaften eines Kreises dessen Gleichung bestimmen können.
- verstehen, dass nur ein Teil eines Kreises als Graf einer Funktion aufgefasst werden kann.
- die Kreisgleichung zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

Kreis

1. Der Kreis ist definiert als Menge aller Punkte P einer Ebene, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben. M ist der Kreismittelpunkt und r der Kreisradius.

- a) Zeigen Sie, dass die Gleichung des Kreises in der x-y-Ebene mit dem Mittelpunkt M(0|0) und dem Radius $r = 2$ gegeben ist durch
$$x^2 + y^2 = 4$$
- b) Zeigen Sie, dass die Gleichung des Kreises in der x-y-Ebene mit dem allgemeinen Mittelpunkt M(x₀|y₀) und dem allgemeinen Radius r gegeben ist durch
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Hinweis:

Der Betrag des Vektors MP muss für jeden Punkt P des Kreises gleich r sein.

2. Geben Sie die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r an:

- a) M(0|0) r = 2
b) M(0|1) r = 3
c) M(2|3) r = 4
d) M(-4|1) r = 5

3. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit den jeweiligen Eigenschaften:

- a) Der Kreis hat den Mittelpunkt M(-8|6) und verläuft durch den Punkt P(-5|2).
b) Der Kreis verläuft durch den Punkt P(-2|4) und berührt die y-Achse bei $y = 8$.
c) Der Kreis verläuft durch den Punkt P(1|2) und berührt beide Koordinatenachsen.
d) Der Kreis verläuft durch die Punkte P₁(1|2) und P₂(7|-2), und der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 3x - 19$.
e) Der Kreis verläuft durch die Punkte P₁(1|3), P₂(6|-2) und P₃(5|1).
f) Der Kreis verläuft durch den Punkt P(10|1) und berührt sowohl die y-Achse als auch die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 11$.

4. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises k mit der Geraden g :
- a) $k: (x - 1)^2 + y^2 = 1$ $g: y = x$
b) $k: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ $g: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
5. Die obere Hälfte eines Kreises in der x - y -Ebene, d.h. der obere Halbkreis, kann als Graf einer Funktion f aufgefasst werden.
- a) Erklären Sie, warum man nicht den ganzen Kreis als Graf einer Funktion auffassen kann.
b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung derjenigen Funktion f , deren Graf der obere Halbkreis des folgenden gegebenen Kreises ist:
i) $x^2 + y^2 = 4$
ii) $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$
c) Bestimmen Sie für die beiden Funktionen in b) den grösstmöglichen Definitionsbereich sowie den dazugehörigen Wertebereich.
6. Gegeben sind der Kreis k und die Gerade g :
- $k: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
 $g: x + 2y = 5$
- Bestimmen Sie
- a) die Koordinaten des Mittelpunktes sowie den Radius des Kreises k .
b) die Länge der Sehne, die der Kreis k aus der Gerade g herausschneidet.

Kugel

7. * Bestimmen Sie die Gleichung einer Kugel mit dem Mittelpunkt $M(x_0|y_0|z_0)$ und dem Radius r .
- Hinweis:
Überlegen Sie sich, dass es eine Analogie gibt zwischen einem Kreis in der zweidimensionalen x - y -Ebene und einer Kugel im dreidimensionalen x - y - z -Raum.
8. * Eine Kugel wird mit der x - y -Ebene geschnitten.
- a) Zeigen Sie, dass die Schnittkurve ein Kreis ist.
- Hinweis:
Kombinieren Sie die Gleichungen der Kugel und der x - y -Ebene, und stellen Sie fest, dass daraus die Gleichung eines Kreises resultiert.
- b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, welcher entsteht, wenn man die folgende Kugel mit der x - y -Ebene schneidet:
- Kugel: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$

Lösungen

1. $MP = OP - OM = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$$|MP|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

2. a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + (y-1)^2 = 9$

c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

d) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$

3. a) $(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 25$

b) $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$

c) 2 mögliche Kreise

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

d) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 16$

e) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

f) 2 mögliche Kreise

$$(x - 10)^2 + (y + 9)^2 = 10$$

$$(x - 5)^2 + (y - 15)^2 = 25$$

4. a) $S_1(0|0)$, $S_2(1|1)$

b) $S_1(5|-2)$, $S_2\left(\frac{9}{5} \mid -\frac{2}{5}\right)$

5. a) ...

b) i) $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

ii) $y = f(x) = \sqrt{25 - (x + 5)^2} + 8$

c) i) $D = [-2,2]$ $W = [0,2]$

ii) $D = [-10,0]$ $W = [8,13]$

6. a) $M(-2|1)$, $r = 5$

b) $s = 7.5$

7. * $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

8. * a) Kugel: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

x-y-Ebene: $z = 0$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 - z_0^2$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises in der x-y-Ebene.

b) mit a): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Mittelpunkt $M(-1|2)$, Radius $r = 4$