

## Übung 9                      Vektoren Skalarprodukt, Vektorprodukt

### Lernziele

- das Skalarprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Skalarproduktes anwenden können.
- das Skalarprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- das Vektorprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Vektorproduktes anwenden können.
- das Vektorprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

### Aufgaben

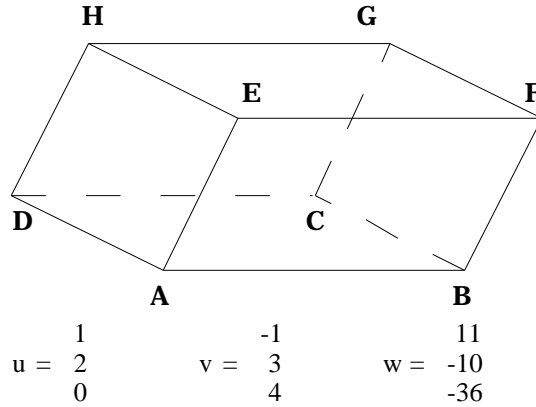
#### Skalarprodukt

1.     *Papula*: 129/10, 129/11, 130/17
2.     Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge ein Rechteck bilden:  
          A(7|6|3)            B(4|10|1)            C(-2|6|2)            D(1|2|4)
3.     Bestimmen Sie den Wert von k, damit die Vektoren a und b orthogonal werden:  
a)      $a = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$              $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$   
b)      $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3k \\ -4 \end{pmatrix}$              $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$   
           $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$              $\begin{pmatrix} 7 \\ 2k \end{pmatrix}$
4.     Gegeben sind die drei Vektoren a, b und c :  
           $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$              $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$              $c = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$   
Bestimmen Sie den Wert von k, damit gilt:  
           $(a+k \cdot b) \perp c$
5.     Bestimmen Sie die Komponenten eines dreidimensionalen Vektors vom Betrag 20, welcher mit der x-Achse und mit der y-Achse je einen Winkel von 60° einschliesst.
6.     Der Vektor x soll als Summe zweier Vektoren y und z geschrieben werden.  
          y soll dabei parallel zu a und z senkrecht zu b sein:  
           $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$              $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$              $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
Bestimmen Sie y und z .

Vektorprodukt

7. Papula: 131/23, 131/24, 132/26

8. Der Spat ABCDEFGH wird aufgespannt durch die drei Vektoren  $u = AB$ ,  $v = AD$  und  $w = AE$ :



Durch die Eckpunkte B, D und G wird eine Ebene gelegt.  
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das vom Spat aus dieser Ebene geschnitten wird.

9. Gegeben sind die beiden Vektoren a und b:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Einheitsvektoren, die sowohl zu a als auch zu b senkrecht stehen.

10. Eine Pyramide bestehe aus der Basis ABC und der Spitze S:

$$A(2|4|-7) \quad B(3|4|-9) \quad C(-1|-5|5) \quad S(8|4|8)$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, welcher auf der über S hinaus verlängerten Pyramidenhöhe liegt und von S den Abstand 7 hat.

### Lösungen

1. siehe *Papula*

2. ...

3.  $a \cdot b = 0$

a)  $k = -2$

b)  $k = -1$

4.  $k = 1$

5.  $x_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix}$

6.  $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

7. siehe *Papula*

zu 132/26:

Das Spatprodukt  $[a \ b \ c]$  gehört nicht zu den Lernzielen des Unterrichts.  
Damit  $a, b$  und  $c$  in einer Ebene liegen, muss das Vektorprodukt von zwei der drei Vektoren senkrecht zum dritten Vektor stehen, also z.B.  $(a \times b) \cdot c = 0$

8.  $A_{BDG} = \frac{1}{2} |BD \times BG| = \frac{1}{2} \sqrt{608} = 12.3$

9.  $x = k \cdot (a \times b)$   
 $|x| = 1$        $x_1 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, x_2 = -x_1 = -\frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

10. SP steht senkrecht zur Pyramidenbasis, ist daher ein Vielfaches von  $AB \times AC$  und hat Betrag 7

$$SP = k \cdot (AB \times AC)$$

$$|SP| = 7 \qquad OP = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad P(14|6|11)$$

$$OP = OS + SP$$