Übung 7 Funktionen
Hyperbolische Funktionen, Funktion-Funktionsgleichung-Graf

Lernziele

- die Grafen der hyperbolischen Funktionen verstehen.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- aus der Funktionsgleichung einer einfacheren Funktion den Grafen der Funktion zeichnen können.
- aus Eigenschaften einer einfacheren Funktion bzw. aus deren Grafen die Funktionsgleichung bestimmen können.
- den Begriff der Halbwertszeit verstehen.

Aufgaben

Hyperbolische Funktionen

1. Skizzieren Sie die Grafen der drei folgenden Exponentialfunktionen f, g und h:

f.: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x) = e^x$

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = g(x) = e^{-x}$

h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = h(x) = -e^{-x}$

2. Die Funktion sinh kann als arithmetisches Mittel aus den beiden in der Aufgabe 1 definierten Funktionen f und h aufgefasst werden:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{f(x) + h(x)}{2}$$

Die Funktion cosh kann als arithmetisches Mittel aus den beiden in der Aufgabe 1 definierten Funktionen f und g aufgefasst werden:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{f(x) + g(x)}{2}$$

Zeichnen Sie mit Hilfe dieser Feststellungen sowie aus den Grafen von f, g und h

a) den Grafen von sinh.

b) den Grafen von cosh.

3. Erklären Sie aus den Definitionen der Funktionen sinh, cosh, tanh und coth, dass

a) $\sinh(x) \approx \cosh(x)$ für grosse positive x

b) $\tanh(x) \approx 1$ für grosse positive x

c) $\tanh(x) \approx -1$ für grosse negative x

d) coth(x) nicht definiert ist für $x = 0$.

Funktion-Funktionsgleichung-Graf

4. *Papula*: 299/1, 299/4, 300/12, 303/4, 306/4, 306/6

5. Eine Gerade g_1 geht durch die Punkte A(-2;0) und B(5;5), eine zweite Gerade g_2 mit der Steigung $m = -5/3$ durch den Punkt C(-3;10).

   a) Wie lauten die Funktionsgleichungen der Funktionen f_1 und f_2, deren Grafen die Geraden g_1 und g_2 sind?

   b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, welches durch die Geraden g_1 und g_2 und die x-Achse umrandet wird.

6. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion

$$f: \quad \{x \quad R \mid -1 \le x \le 3\} \to \{y \quad R \mid 2 \le x \le 10\}$$
$$x \to y = f(x) = \ldots$$

7. Gegeben sind die beiden Potenzfunktionen

$$f_1: \quad R \to R$$
$$x \to y = f_1(x) = ax^3$$

$$f_2: \quad R \to R$$
$$x \to y = f_2(x) = bx^4.$$

   Die Grafen der beiden Funktionen schneiden sich im Punkt S(4;16).

   Bestimmen Sie a und b.

8. Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Zahl N der noch nicht zerfallenen Atomkerne exponentiell ab:

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$$

   Die sogenannte Halbwertszeit $t_{1/2}$ drückt aus, nach welcher Zeitspanne sich die Zahl N jeweils halbiert.

   Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen λ und der Halbwertszeit $t_{1/2}$, d.h. drücken Sie $t_{1/2}$ durch λ aus.

Lösungen

1. ...

2. a) ...
   b) ...

3. a) ...
   b) ...
   c) ...
   d) ...

4. siehe *Papula*

5. a) g_1: $y = f_1(x) = \frac{5}{7}x + \frac{10}{7}$

   g_2: $y = f_2(x) = -\frac{5}{3}x + 5$

   b) Fläche $A = \frac{25}{4}$

6. $f(x) = 2x + 4$

7. $a = \frac{1}{4}$

   $b = \frac{1}{16}$

8. $t_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\ln(2)$