Übung 6 Funktionen
Potenz- / Wurzel- / Trigonom. / Arkus- / Exponential- / Log.-Funktionen

PUZZLE

Themen

1 Potenz- / Wurzelfunktionen

2 Trigonometrische Funktionen / Arkusfunktionen

3 Exponential- / Logarithmusfunktionen

Lernziele

1 Potenz- / Wurzelfunktionen
- die Definition einer Potenzfunktion kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Umkehrbarkeit einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten beurteilen können (K3).
- die Definition einer Wurzelfunktion kennen (K1).
- den Definitionsbereich einer Wurzelfunktion kennen (K1).
- verstehen, dass eine Wurzelfunktion die Umkehrfunktion einer Potenzfunktion ist (K2).
- die Umkehrfunktion einer einfacheren Potenzfunktion bestimmen können (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Wurzelfunktion analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Wurzelfunktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Wurzelfunktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten als Kombination von Potenz- und Wurzelfunktion verstehen (K2).

2 Trigonometrische Funktionen / Arkusfunktionen
- die Definitionen der trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan und cot sowohl am Einheitskreis als auch am rechtwinkligen Dreieck kennen (K1).
- verstehen, dass die trigonometrischen Funktionen periodisch sind (K2).
- die charakteristischen Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer trigonometrischen Funktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Umkehrbarkeit einer trigonometrischen Funktion beurteilen können (K3).
- die Definitionen der Arkusfunktionen arcsin, arccos, arctan und arccot kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Arkusfunktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Arkusfunktion von Hand richtig skizzieren können (K1).

3 Exponential- / Logarithmusfunktionen
- die Definition einer Exponentialfunktion kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Exponentialfunktion analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Exponentialfunktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Exp.-Funktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Umkehrbarkeit einer Exponentialfunktion beurteilen können (K3).
- die Definition einer Logarithmusfunktion kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Logarithmusfunktion kennen (K1).
- die Umkehrfunktion einer einfacheren Exponentialfunktion bestimmen können (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Log.-Funktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Rechenregeln für Logarithmen kennen (K1).

- den Zusammenhang zwischen den Potenz- und den Logarithmengesetzen verstehen (K2).
- den Basiswechsel bei Logarithmen verstehen (K2).

Aufgaben

3 Exponential- / Logarithmusfunktionen

Einzelstudium

a) Studieren Sie im Buch *Papula* die Abschnitte *11.1 Grundbegriffe* (Seite 267) sowie vom Abschnitt *11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion* die ersten vier Zeilen (Seite 267, Definition einer Exponentialfunktion).

b) Gegeben ist die folgende Exponential-Funktion
$f\colon\ A \to B,\ x \to y = f(x) = a^{kx}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ k\ \ R\setminus\{0\}$ beliebig)

Stellen Sie die Funktion f mit dem Computerprogramm MAPLE für verschiedene Werte für a und k grafisch dar.
Finden Sie charakteristische Eigenschaften von f, die unabhängig von a und k sind.
Finden Sie auch Eigenschaften, die von den Werten für a und k abhängen.

c) Studieren Sie im Buch *Papula* nun den ganzen Abschnitt *11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion* (Seiten 267 bis 269).

d) Skizzieren Sie von Hand und ohne Hilfsmittel die Grafen der Exponentialfunktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
i) $f(x) = 2^x$
ii) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
iii) $f(x) = 3^{-x}$
iv) $f(x) = 3^{-2x}$

e) Gegeben ist die folgende Exponential-Funktion
$f\colon\ A \to B,\ x \to y = f(x) = a^{kx}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ k\ \ R\setminus\{0\}$ beliebig)

i) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.
Hängt die Bijektivität von den Werten von a und k ab?

ii) Machen Sie - falls Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass f nicht bijektiv ist - einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv wird.

f) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *12.1 Grundbegriffe* (Seiten 278 bis 280).
Diese Aufgabe können Sie weglassen, wenn Sie bereits mit dem Logarithmus-Begriff vertraut sind.

g) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *12.2 Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion* (Seiten 280 bis 283).

h) Gegeben sind die Exponentialfunktionen $f\colon\ A \to B,\ x \to y = f(x) = ...$

i) $f(x) = e^{2x}$
ii) $f(x) = a^x - 1$
iii) $f(x) = 2e^{-3x} + 4$

Lösen Sie für jede Funktion i) bis iii) die folgenden Aufgaben:

- Skizzieren Sie den Grafen von f.
- Bestimmen Sie die Mengen A und B so, dass die Funktion f bijektiv wird.
- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon\ B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x)$.
- Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion f^{-1}.

i) Skizzieren Sie von Hand und ohne Hilfsmittel die Grafen der Arkusfunktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
i) $f(x) = \lg(x)$

ii) $f(x) = \ln(x)$
iii) $f(x) = 2 \ln(x-1)$

j) Die Potenz a^{kx} ($a>0$, k R beliebig) lässt sich stets in die Form $e^{\lambda x}$ bringen ($e = 2.71...$ = Eulersche Zahl, λ R).
Wie gross ist λ, ausgedrückt durch a und k?

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgaben, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 3.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1 und 2 unterrichten.

Lösungen

3. a) …

b) …

c) …

d) ... (mit MAPLE nachprüfen)

e) i) nicht bijektiv (unabhängig von a und k)
ii) $A = R$, $B = R^+$

f) …

g) …

h) i) $A = R$, $B = R^+$
$f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)}{2}$

ii) $A = R$, $B = \{y \quad R \mid y>-1\}$
$f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \ln(x+1)$

iii) $A = R$, $B = \{y \quad R \mid y>4\}$
$f^{-1}: B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\frac{\ln\left(\frac{x-4}{2}\right)}{3}$

i) ... (mit MAPLE nachprüfen)

j) $\lambda = \ln(a^k)$