Übung 6 Funktionen

Potenz- / Wurzel- / Trigonom. / Arkus- / Exponential- / Log.-Funktionen

PUZZLE

Themen

1 Potenz- / Wurzelfunktionen

2 Trigonometrische Funktionen / Arkusfunktionen

3 Exponential- / Logarithmusfunktionen

Lernziele

1 Potenz- / Wurzelfunktionen

- die Definition einer Potenzfunktion kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Umkehrbarkeit einer Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten beurteilen können (K3).
- die Definition einer Wurzelfunktion kennen (K1).
- den Definitionsbereich einer Wurzelfunktion kennen (K1).
- verstehen, dass eine Wurzelfunktion die Umkehrfunktion einer Potenzfunktion ist (K2).
- die Umkehrfunktion einer einfacheren Potenzfunktion bestimmen können (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Wurzelfunktion analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Wurzelfunktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Wurzelfunktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten als Kombination von Potenz- und Wurzelfunktion verstehen (K2).

2 Trigonometrische Funktionen / Arkusfunktionen

- die Definitionen der trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan und cot sowohl am Einheitskreis als auch am rechtwinkligen Dreieck kennen (K1).
- verstehen, dass die trigonometrischen Funktionen periodisch sind (K2).
- die charakteristischen Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer trigonometrischen Funktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Umkehrbarkeit einer trigonometrischen Funktion beurteilen können (K3).
- die Definitionen der Arkusfunktionen arcsin, arccos, arctan und arccot kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Arkusfunktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Arkusfunktion von Hand richtig skizzieren können (K1).

3 Exponential- / Logarithmusfunktionen

- die Definition einer Exponentialfunktion kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Exponentialfunktion analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Exponentialfunktion kennen (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Exponentialfunktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Umkehrbarkeit einer Exponentialfunktion beurteilen können (K3).
- die Definition einer Logarithmusfunktion kennen (K1).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Logarithmusfunktion kennen (K1).
- die Umkehrfunktion einer einfacheren Exponentialfunktion bestimmen können (K1).
- aus der Funktionsgleichung den Grafen einer Logarithmusfunktion von Hand richtig skizzieren können (K1).

- die Rechenregeln für Logarithmen kennen (K1).
- den Zusammenhang zwischen den Potenz- und den Logarithmengesetzen verstehen (K2).
- den Basiswechsel bei Logarithmen verstehen (K2).

Aufgaben

1 Potenz- / Wurzelfunktionen

Einzelstudium

a) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *7.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten* (Seiten 209 bis 211).

b) Stellen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE einige Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten grafisch dar.
Finden Sie anhand der Grafen charakteristische Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten heraus.

c) Skizzieren Sie von Hand und ohne Hilfsmittel die Grafen der Potenzfunktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
i) $f(x) = x^3$
ii) $f(x) = x^8$
iii) $f(x) = \frac{1}{x}$
iv) $f(x) = x^{-4}$

d) Gegeben ist eine Potenzfunktion mit einem beliebigen ganzzahligen **geraden** Exponenten n:
$f:\ A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = x^n$

i) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.

ii) Machen Sie - falls Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass f nicht bijektiv ist - einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv wird.

e) Gegeben ist eine Potenzfunktion mit einem beliebigen ganzzahligen **ungeraden** Exponenten n:
$f:\ A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = x^n$

i) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.

ii) Machen Sie - falls Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass f nicht bijektiv ist - einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv wird.

f) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *7.2 Wurzelfunktionen* (Seiten 211 bis 213).

g) Stellen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE einige Wurzelfunktionen mit ganzzahligen Exponenten grafisch dar.
Finden Sie anhand der Grafen charakteristische Eigenschaften von Wurzelfunktionen heraus.

h) Skizzieren Sie von Hand und ohne Hilfsmittel die Grafen der Wurzelfunktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
i) $f(x) = \sqrt{x}$
ii) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
iii) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

i) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
$\sqrt[3]{-8} = -2$

j) Gegeben sind die Potenzfunktionen $f:\ A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = ...$

i) $f(x) = x^2-1$
ii) $f(x) = x^3+2$
iii) $f(x) = x^{-4}+3$

Lösen Sie für jede Funktion i) bis iii) die folgenden Aufgaben:

- Skizzieren Sie den Grafen von f.
- Bestimmen Sie die Mengen A und B so, dass die Funktion f bijektiv wird.
- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}: $B \rightarrow A$, $x \rightarrow y = f^{-1}(x)$.
- Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion f^{-1}.

k) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *7.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten* (Seiten 213 bis 215).

l) Schreiben Sie die folgenden Potenzen mit Hilfe des Wurzelzeichens und ganzzahligen Exponenten:

i) $x^{2/3}$
ii) $x^{-5/2}$
iii) $x^{-1/4}$

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgaben, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 1.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 2 und 3 unterrichten.

2 Trigonometrische Funktionen / Arkusfunktionen

Einzelstudium

a) Studieren Sie im Buch *Papula* die Abschnitte *9.1 Definitionen und Grundbegriffe* (Seiten 231 bis 236), *9.2 Sinus- und Kosinusfunktion* (Seiten 236 bis 237) und *9.3 Tangens- und Kotangensfunktion* (Seiten 237 bis 238).

b) Gegeben ist die folgende allgemeine Sinus-Funktion
f: $A \rightarrow B$, $x \rightarrow y = f(x) = a\cdot\sin(bx+c)$ ($a>0$, $b>0$, c R beliebig)

Stellen Sie die Funktion f mit dem Computerprogramm MAPLE für verschiedene Werte für a, b und c grafisch dar.
Finden Sie charakteristische Eigenschaften von f, die unabhängig von a, b und c sind.
Finden Sie auch Eigenschaften, die von den Werten für a, b und c abhängen.

c) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *9.5.1.1 Die allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion* (Seiten 240 bis 244).

d) *Papula:* 303/6
Hinweis: Erstellen Sie die Skizze von Hand und ohne Hilfsmittel.

e) Gegeben ist die folgende Sinus-Funktion
f: $A \rightarrow B$, $x \rightarrow y = f(x) = \sin(x)$

i) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.

ii) Machen Sie - falls Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass f nicht bijektiv ist - einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv wird.

f) Gegeben ist die folgende allgemeine Sinus-Funktion
f: A → B, x → y = f(x) = a·sin(bx+c) (a>0, b>0, c R beliebig)

i) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.

ii) Machen Sie - falls Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass f nicht bijektiv ist - einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv wird.

g) Gegeben ist die folgende Tangens-Funktion
f: A → B, x → y = f(x) = tan(x)

i) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.

ii) Machen Sie - falls Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass f nicht bijektiv ist - einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv wird.

h) Studieren Sie im Buch *Papula* das Kapitel *10 Arkusfunktionen* (Seiten 258 bis 264).

i) Skizzieren Sie von Hand und ohne Hilfsmittel die Grafen der Arkusfunktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
i) f(x) = arcsin(x)
ii) f(x) = arccos(x)
iii) f(x) = arctan(x-1)

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgaben, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 2.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1 und 3 unterrichten.

3 Exponential- / Logarithmusfunktionen

Einzelstudium

a) Studieren Sie im Buch *Papula* die Abschnitte *11.1 Grundbegriffe* (Seite 267) sowie vom Abschnitt *11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion* die ersten vier Zeilen (Seite 267, Definition einer Exponentialfunktion).

b) Gegeben ist die folgende Exponential-Funktion
f: A → B, x → y = f(x) = a^{kx} (a>0, a≠1, k R\{0} beliebig)

Stellen Sie die Funktion f mit dem Computerprogramm MAPLE für verschiedene Werte für a und k grafisch dar.
Finden Sie charakteristische Eigenschaften von f, die unabhängig von a und k sind.
Finden Sie auch Eigenschaften, die von den Werten für a und k abhängen.

c) Studieren Sie im Buch *Papula* nun den ganzen Abschnitt *11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion* (Seiten 267 bis 269).

d) Skizzieren Sie von Hand und ohne Hilfsmittel die Grafen der Exponentialfunktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
i) $f(x) = 2^x$
ii) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

iii) $f(x) = 3^{-x}$
iv) $f(x) = 3^{-2x}$

e) Gegeben ist die folgende Exponential-Funktion
f: $A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = a^{kx}$ ($a>0$, $a\neq 1$, k R\{0} beliebig)

i) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.
Hängt die Bijektivität von den Werten von a und k ab?

ii) Machen Sie - falls Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass f nicht bijektiv ist - einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv wird.

f) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *12.1 Grundbegriffe* (Seiten 278 bis 280).
Diese Aufgabe können Sie weglassen, wenn Sie bereits mit dem Logarithmus-Begriff vertraut sind.

g) Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *12.2 Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion* (Seiten 280 bis 283).

h) Gegeben sind die Exponentialfunktionen f: $A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = ...$

i) $f(x) = e^{2x}$
ii) $f(x) = a^{x}-1$
iii) $f(x) = 2e^{-3x}+4$

Lösen Sie für jede Funktion i) bis iii) die folgenden Aufgaben:

- Skizzieren Sie den Grafen von f.
- Bestimmen Sie die Mengen A und B so, dass die Funktion f bijektiv wird.
- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}: $B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x)$.
- Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion f^{-1}.

i) Skizzieren Sie von Hand und ohne Hilfsmittel die Grafen der Arkusfunktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
i) $f(x) = \lg(x)$
ii) $f(x) = \ln(x)$
iii) $f(x) = 2 \ln(x-1)$

j) Die Potenz a^{kx} ($a>0$, k R beliebig) lässt sich stets in die Form $e^{\lambda x}$ bringen (e = 2.71... = Eulersche Zahl, λ R).
Wie gross ist λ, ausgedrückt durch a und k?

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgaben, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 3.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1 und 2 unterrichten.

Lösungen

1. a) ...

b) ...

c) ... (mit MAPLE nachprüfen)

d) i) nicht bijektiv
ii) $A = B = R_0^+$

e) i) bijektiv
ii) (erübrigt sich)

f) ...

g) ...

h) ... (mit MAPLE nachprüfen)

i) Die Aussage ist falsch, da $\sqrt[3]{-8}$ nicht definiert ist.
Nur Wurzeln aus positiven Zahlen oder aus Null sind definiert.

j) i) $A = R_0^+$, $B = \{y \quad R \mid y \geq -1\}$
$f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt{y+1}$

ii) $A = B = R$
$$f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & (x \geq 2) \\ -\sqrt[3]{|x-2|} & (x < 2) \end{cases}$$

iii) $A = R_0^+$, $B = \{y \quad R \mid y > 3\}$
$$f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x-3}}$$

k) ...

l) i) $x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$

ii) $x^{-5/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^5}$

iii) $x^{-1/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

2. a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) i) nicht bijektiv
ii) $A = \{x \quad R \mid -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$, $B = \{y \quad R \mid -1 \leq y \leq 1\}$

f) i) nicht bijektiv
ii) $A = \{x \quad R \mid -\pi/2b - c/b \leq x \leq \pi/2b - c/b\}$, $B = \{y \quad R \mid -a \leq y \leq a\}$

g) i) nicht bijektiv
ii) $A = \{x \quad R \mid -\pi/2 < x < \pi/2\}$, $B = R$

h) ...

i) ... (mit MAPLE nachprüfen)

3. a) ...

b) ...

c) ...

d) ... (mit MAPLE nachprüfen)

e) i) nicht bijektiv (unabhängig von a und k)
ii) $A = R$, $B = R^+$

f) ...

g) ...

h) i) $A = R$, $B = R^+$
$f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)}{2}$

ii) $A = R$, $B = \{y\ \ R \mid y>-1\}$
$f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = \ln(x+1)$

iii) $A = R$, $B = \{y\ \ R \mid y>4\}$
$f^{-1}: B \to A,\ x \to y = f^{-1}(x) = -\frac{\ln\left(\frac{x-4}{2}\right)}{3}$

i) ... (mit MAPLE nachprüfen)

j) $\lambda = \ln(a^k)$