Übung 5 Funktionen
Ganzrationale / Quadratische / Gebrochenrationale Funktion

Lernziele

Ganzrationale Funktion
- die Definition einer ganzrationalen Funktion oder Polynomfunktion kennen (K1).
- wissen, was man unter dem Grad einer Polynomfunktion versteht (K1).
- den Unterschied zwischen einer Polynom- und einer Potenzfunktion verstehen (K2).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Polynomfunktion analysieren können (K4).
- die charakteristischen Eigenschaften einer Polynomfunktion kennen (K1).

Quadratische Funktion
- die Definition einer quadratischen Funktion kennen (K1).
- die Normalform einer quadratischen Funktion kennen (K1).
- wissen, dass der Graf einer quadratischen Funktion eine Parabel ist (K1).
- die Produkt- und die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion kennen (K1).
- von Hand die Normalform in die Scheitelpunktsform und umgekehrt umformen können (K1).
- den Zusammenhang zwischen der Lage der Parabel und den Parametern in der Scheitelpunktsform verstehen (K2).
- aus der Scheitelpunktsform den Grafen einer quadratischen Funktion von Hand richtig skizzieren können (K1).
- die Umkehrbarkeit einer quadratischen Funktion beurteilen können (K3).

Gebrochenrationale Funktionen
- die Definition einer gebrochenrationalen Funktion kennen (K1).
- den Unterschied zwischen echt und unecht gebrochenrationalen Funktionen kennen (K1).
- wissen, was ein Pol einer gebrochenrationalen Funktion ist (K1).
- das charakteristische Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion in der Nähe eines Poles kennen (K1) und verstehen (K2).
- verstehen, was eine Asymptote ist (K2).
- das asymptotische Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen mit Hilfe von MAPLE analysieren können (K3).

Aufgaben

Ganzrationale Funktion

1. Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *5.1 Definition einer ganzrationalen Funktion* (Seite 179).
2. Erklären Sie den Unterschied zwischen einer Polynomfunktion und einer Potenzfunktion.
3. Stellen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE einige ganzrationale Funktionen grafisch dar.
   Finden Sie anhand der Grafen charakteristische Eigenschaften von Polynomfunktionen heraus.

Quadratische Funktion

4. Studieren Sie im Buch *Papula* den Abschnitt *5.3 Quadratische Funktionen* (Seiten 183 bis 187).
5. Geben Sie an, in welcher Form die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion vorliegt:
   a) $f(x) = 4(x-3)^2-1$
   b) $f(x) = x^2-3x+1$
   c) $f(x) = 5(x-1)(x+2)$
6. Formen Sie die Funktionsgleichung von der Scheitelpunkts- in die Normalform um:
   a) $f(x) = 3(x-1)^2+4$
   b) $f(x) = -(x-2)^2$
7. *Papula*: 299/3 (nur Scheitelpunktsform, Produktform weglassen)

8. Der Graf jeder quadratischen Funktion ist eine Parabel. Bestimmen Sie anhand der Funktionsgleichung,
   - i) ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist.
   - ii) die Koordinaten des Scheittelpunktes.

   a) $f(x) = 4(x-3)^2-1$
   b) $f(x) = -(x-2)^2$
   c) $f(x) = x^2-1$

9. Skizzieren Sie von Hand die Grafen der quadratischen Funktionen, welche durch die folgenden Funktionsgleichungen bestimmt sind:
   a) $f(x) = x^2+3$
   b) $f(x) = -x^2-1$
   c) $f(x) = 2(x-3)^2+4$
   d) $f(x) = -(x-3)^2-1$

10. Gegeben ist die (allgemeine) quadratische Funktion
    $f\colon A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = ax^2+bx+c$

    a) Sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von f bestehe aus der Menge aller reellen Zahlen, d.h. A = R, B = R.
    Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Funktion f bijektiv ist oder nicht.

    b) Machen Sie einen Vorschlag für die Mengen A und B, so dass f bijektiv ist.

11. Gegeben sind die quadratischen Funktionen $f\colon A \rightarrow B,\ x \rightarrow y = f(x) = ...$

    a) $f(x) = x^2-2$
    b) $f(x) = (x+3)^2-4$
    c) $f(x) = 2x^2-4x+7$

    Lösen Sie für jede Funktion a) bis e) die folgenden Aufgaben:

    - i) Bestimmen Sie die Scheitelpunktsform von f.
    - ii) Skizzieren Sie den Grafen von f.
    - iii) Bestimmen Sie die Mengen A und B so, dass die Funktion f bijektiv wird.
    - iv) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \rightarrow A,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x)$.
    - v) Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion f^{-1}.

Gebrochenrationale Funktionen

12. Studieren Sie im Buch *Papula* das Kapitel *6 Gebrochenrationale Funktionen* (Seiten 200 bis 209).

13. *Papula*: 301/1, 301/2
    Bearbeiten Sie die Aufgaben nicht von Hand sondern mit Hilfe des Computerprogrammes MAPLE.

Lösungen

Ganzrationale Funktion

1. ...

2. Eine Potenzfunktion n-ten Grades ist eine Polynomfunktion n-ten Grades, bei welcher nur der Koeffizient beim höchsten Exponenten n ungleich Null ist.

3. ... (mögliche Analysekriterien: Polynomgrad, Werte der Koeffizienten, ...)

Quadratische Funktion

4. ...

5. a) Scheitelpunktsform
   b) Normalform
   c) Produktform

6. a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$
   b) $f(x) = - x^2 + 4x - 4$

7. siehe *Papula*

8. a) i) nach oben geöffnet
      ii) $S(3|-1)$
   b) i) nach unten geöffnet
      ii) $S(2|0)$
   c) i) nach oben geöffnet
      ii) $S(0|-1)$

9. ... (mit MAPLE nachprüfen)

10. a) f ist nicht bijektiv.
    b) A = Menge der reellen Zahlen, welche grösser gleich der x-Koordinate des Scheitelpunktes sind
       $= \{xeR \mid x \geq x_S\}$
       B = W (= Bildbereich von f)

11. a) i) $y = x^2-2$
       ii) ... (mit MAPLE) nachprüfen
       iii) $A = R_0^+$, $B = \{y \;\; R \mid y \geq -2\}$
       iv) f^{-1}: $B \rightarrow A$, $x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$
       v) ... (mit MAPLE) nachprüfen
    b) i) $y = (x+3)^2-4$
       ii) ... (mit MAPLE) nachprüfen
       iii) $A = \{x \;\; R \mid x \geq -3\}$, $B = \{y \;\; R \mid y \geq -4\}$
       iv) f^{-1}: $B \rightarrow A$, $x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} -3$
       v) ... (mit MAPLE) nachprüfen
    c) i) $y = 2(x-1)^2+5$
       ii) ... (mit MAPLE) nachprüfen
       iii) $A = \{x \;\; R \mid x \geq 1\}$, $B = \{y \;\; R \mid y \geq 5\}$
       iv) f^{-1}: $B \rightarrow A$, $x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-5}{2}} +1$
       v) ... (mit MAPLE) nachprüfen

Gebrochenrationale Funktionen

12. ...

13. ...