Übung 4 Funktionen Umkehrfunktion

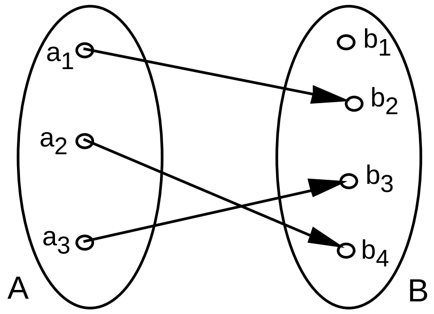
Lernziele

- beurteilen können, ob eine Funktion bijektiv ist oder nicht.
- die zu einer einfacheren bijektiven Funktion gehörige Umkehrfunktion bestimmen können.
- die Eigenschaften des Grafen einer bijektiven Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen dem Grafen einer bijektiven Funktion und dem Grafen der dazugehörigen Umkehrfunktion verstehen.
- die Umkehrfunktion einer linearen Funktion bestimmen können.

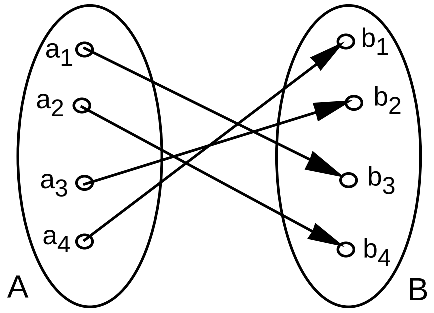
Aufgaben

1. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, welche der folgenden Funktionen bijektiv sind:

a)



b)



c) f: $R^+ \to R^+$, $x \to y = f(x) = x^2$

d) f: $R \to R_0^+$, $x \to y = f(x) = x^2$

e) A = {Vater, Mutter, Sohn, Tochter}, B = {1948, 1976, 1950, 1978}
f: $A \to B$, $x \to y = f(x)$ = Jahrgang von x

i) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
Sohn hat Jahrgang 1976, Tochter hat Jahrgang 1978

ii) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
Sohn hat Jahrgang 1975, Tochter hat Jahrgang 1978

iii) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
Sohn und Tochter haben Jahrgang 1978

f) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen, B = {1974, 1975, ... , 1983, 1984}
f: $A \to B$, $x \to y = f(x)$ = Jahrgang von x

g) A = Menge aller Schweizer Vereine, B = Menge aller Menschen
f: $A \to B$, $x \to y = f(x)$ = PräsidentIn von x

2. Die Funktionen in den Aufgaben 1 e) iii) und 1 g) sind nicht bijektiv.

   Machen Sie für diese beiden Funktionen je einen Vorschlag, wie man die Definitionsmenge A und/oder die Zielmenge B einschränken müsste, um eine bijektive Funktion zu erhalten.

3. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} aller bijektiven Funktionen der Aufgabe 1.

4. Gegeben sei der Graf einer bijektiven Funktion $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x)$

   a) Beschreiben Sie die Eigenschaft(en), die der Graf besitzt im Gegensatz zum Grafen einer Funktion, die nicht bijektiv ist.

   b) Skizzieren Sie den Grafen der zu f gehörigen Umkehrfunktion $f^{-1}: R \rightarrow R,\ y \rightarrow x = f^{-1}(y)$.

5. Die allgemeine Form einer linearen Funktion f lautet

   $$f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = mx + q$$

   Die dazugehörige Umkehrfunktion f^{-1} lautet (siehe Unterricht)

   $$f^{-1}: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{m}\,x + \frac{q}{m}$$

   Zeigen Sie, dass f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion zu f ist, d.h. dass gilt:

   $$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

6. Bearbeiten Sie für jede gegebene lineare Funktion f die folgenden Teilaufgaben:

   i) Skizzieren Sie den Grafen von f.
   ii) Geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f an.
   iii) Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion f^{-1}.

   a) $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = 3x - 2$

   b) $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = -\,x + 4$

   c) $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = x$

   d) $f: R \rightarrow R,\ x \rightarrow y = f(x) = 3$

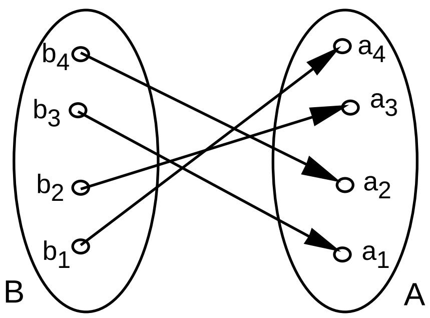
Lösungen

1. a) nicht bijektiv (Nicht jedes b   B ist Bildelement.)
   b) bijektiv
   c) bijektiv
   d) nicht bijektiv (Jedes y R_0^+ (ausser y=0) ist Bildelement von zwei x   R.)
   e) i) bijektiv
      ii) keine Funktion (1975   B)
      iii) nicht bijektiv (1976 tritt nicht als Bildelement auf, 1978 tritt zweimal als Bildelement auf.)
   f) nicht bijektiv (Die Elemente in B treten mehrfach als Bildelemente auf.)
   g) nicht bijektiv (Nicht jeder Mensch ist PräsidentIn eines Schweizer Vereins.)

2. 1 e) iii) A' = {Vater, Mutter, Tochter}
   B' = {1948, 1950, 1978}

   1 g) A' = A
   B' = Menge aller Menschen, die PräsidentIn von genau einem Schweizer Verein sind

3. 1 b)



   1 c) f^{-1}: $R^+ \to R^+$, $y \to x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

   1 e) i) A = {Vater, Mutter, Sohn, Tochter}, B = {1948, 1976, 1950, 1978}
   f^{-1}: $B \to A$, $y \to x = f^{-1}(y)$ = Person, deren Jahrgang y ist

4. a) ...
   b) ...

5. a) i) ...
      ii) f^{-1}: $R \to R$, $x \to y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3} x - \frac{2}{3}$
      iii) ...
   b) i) ...
      ii) f^{-1}: $R \to R$, $x \to y = f^{-1}(x) = - x - 4$
      iii) ...
   c) i) ...
      ii) f^{-1}: $R \to R$, $x \to y = f^{-1}(x) = x$
      iii) ...
   d) i) ...
      ii) f^{-1} existiert nicht, da f nicht bijektiv ist.
      iii) (hinfällig)