

Übung 1 Gleichungen Begriffe, Lösen einer Gleichung, Gleichung(ssystem) auf MAPLE

Lernziele

- verstehen, was eine Gleichung ist.
- beurteilen können, ob eine Gleichung eine Aussage oder eine Aussageform ist.
- beurteilen können, ob eine Gleichung eine Identität oder eine Bestimmungsgleichung ist.
- beurteilen können, ob eine Umformung eine Äquivalenzumformung ist oder nicht.
- einfachere Gleichungen von Hand lösen können.
- mit Hilfe des Computerprogrammes MAPLE eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem lösen können.
- ein zur Lösung einer einfacheren Textaufgabe gehöriges Gleichungssystem aufstellen können.

Aufgaben

Gleichungen

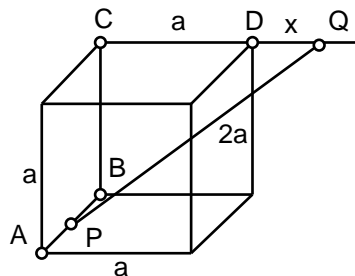
- Bearbeiten Sie für die gegebenen Gleichungen die folgenden Aufgabenstellungen:
 - Beurteilen Sie, ob die Gleichung eine Aussage oder eine Aussageform ist.
 - Falls die Gleichung eine Aussage ist:
Ist die Aussage wahr oder falsch?
Falls die Gleichung eine Aussageform ist:
Geben Sie den/die Wert(e) für die Variable an, für welche(n) die Aussageform in eine wahre bzw. in eine falsche Aussage übergeht.
 - $4 + 3 = 7$
 - $3x - 4 = x$
 - $(x - 3) = x^2 - 6x + 9$
 - $\sqrt{9} = -3$
 - $x + y = x - y$
- Beurteilen Sie, ob die gegebene Gleichung eine Identität oder eine Bestimmungsgleichung ist:
 - $8 - 5 = 3$
 - $2y + 3y = 6$
 - $x^2 \cdot x^3 = x^5$
 - $x^2 \cdot x^3 = x^6$
 - $\frac{x}{x} = 1$
 - $0 \cdot x = 0$
 - $\sin(\quad) + \cos(\quad) = 1$
 - $\sin^2(\quad) + \cos^2(\quad) = 1$
- Begründen Sie, warum die gegebene Umformung keine Äquivalenzumformung ist:
 - Multiplikation mit 0
 - Division mit 0
- Beurteilen Sie, ob die gegebene Umformung eine Äquivalenzumformung ist oder nicht:
 - Quadrieren
 - Quadratwurzel ziehen
- Lösen Sie die folgenden Bestimmungsgleichungen nach x auf:
 - $(14-x) - (5-2x) = 14$
 - $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-8}{3}$
 - $\frac{8x-3}{8} - \frac{8+3x}{3} = 0$
 - $57 - 2(x+21) = 23 - 2(x+4)$
 - $\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{x+3}{4-x^2}$
 - $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$
- Lösen Sie die folgenden Bestimmungsgleichungen nach x auf.
Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen reellen Werte für die Parameter p, a, b, c.
 - $x(p-3) = p$
 - $cx = 5c+5$
 - $(x+1)(p-2) = 2px$
 - $(a-b)x = a$
- * Lösen Sie die folgenden Bestimmungsgleichungen nach x auf.
Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen reellen Werte für die Parameter p, a, b.
 - $\frac{3x+p}{3x-1} = \frac{x+1}{x-p}$
 - $\frac{a}{x} + 1 = \frac{x}{x-b}$

Gleichungen / Gleichungssysteme auf MAPLE

8. Studieren Sie das Maple-File "gleichungen.mws", welches bereits im Unterricht gezeigt wurde. Sie finden das File im Internet unter:
<http://www.tel.fh-htwchur.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...)
9. Lösen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE die Gleichungen in den Aufgaben 5 und 6. Vergleichen Sie die Lösungen mit denjenigen, die Sie von Hand bestimmt haben.
10. Lösen Sie mit MAPLE die folgenden Gleichungen:
a) *Papula*: 39/1 ("Zu Abschnitt 3"), 40/3
b) *Papula*: 305/16
Überlegen Sie sich, ob MAPLE alle Lösungen der Gleichungen ausgibt.
11. Lösen Sie mit MAPLE die folgenden Gleichungssysteme:
Papula: 41/4, 41/5, 41/6
12. Bearbeiten Sie die nachfolgenden "Textaufgaben" wie folgt:
- Erstellen Sie ein Gleichungssystem, welches die gesuchte(n) Grösse(n) enthält.
- Lösen Sie das Gleichungssystem mit MAPLE.
Hinweise:
- Versuchen Sie, möglichst einfache Gleichungen aufzustellen.
- Führen Sie nebst den gesuchten Grössen allenfalls noch weitere zweckmässige Unbekannte ein.
- Scheuen Sie sich nicht vor einer allfälligen grossen Zahl von Gleichungen. Das Auflösen des Gleichungssystems erledigt ja der Computer.
- a) "Ein Fenster hat die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Halbkreis. Die Gesamthöhe des Fensters misst 4.20 m, der Flächeninhalt 8.00 m². Bestimmen Sie den Kreisradius."
- b) "Wenn man die Grundkante einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) um 1 m verkürzt und die Höhe dafür um 1 m verlängert, bleibt die Körperdiagonale gleich lang. Wenn man aber stattdessen die Grundkante um 1 m verlängert, muss man die Höhe um 3 m verkürzen, damit die Körperdiagonale gleich lang bleibt. Wie lang sind die Kanten der ursprünglichen Säule?"
- c) "Ein Schuldner muss zwei Hypotheken verzinsen, eine zu 6% und eine zu 6.5%. Er muss dafür pro Jahr Fr. 18'560.- aufbringen. Dieser Betrag wäre um Fr. 1'520.- kleiner, wenn die Zinssätze auf 5.5% bzw. 6% sinken würden. Wie gross sind die beiden Hypotheken?"
- d) "Die Arme einer Hebelwaage sind verschieden lang. Legt man eine Masse auf die linke Waagschale, so braucht es auf der rechten 4.5 kg, damit die Waage im Gleichgewicht ist. Legt man dieselbe Masse auf die rechte Schale, so braucht es auf der linken 8 kg für das Gleichgewicht. Berechnen Sie die Masse sowie das Verhältnis der Hebelarmlängen."
- e) "Ein Würfel hat die bekannte Kantenlänge a. Der Punkt P liegt auf der Kante AB, der Punkt Q auf der Verlängerung der Kante CD so, dass gilt:

$$\overline{PQ} = 2a \quad \text{und} \quad \overline{AP} = \overline{DQ}$$

Wie gross ist $x = \overline{DQ}$?"



- f) "Zwei Kreise haben den gleichen Radius und schneiden sich so, dass der eine Kreis durch das Zentrum des anderen läuft. Bestimmen Sie den Inhalt der Schnittfläche der beiden Kreise in Abhängigkeit des Kreisradius' r."

Lösungen

Gleichungen

1. a) i) Aussage
 ii) wahr
- b) i) Aussageform
 ii) wahre Aussage für $x = 2$
 falsche Aussage für $x \neq 2$
- c) i) Aussageform
 ii) wahre Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$
- d) i) Aussage
 ii) falsch
- e) i) Aussageform
 ii) wahre Aussage für $y = 0$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$
 falsche Aussage für $y \neq 0$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$
2. a) Identität
 c) Identität
 e) Bestimmungsgleichung
 g) Bestimmungsgleichung
- b) Bestimmungsgleichung
 d) Bestimmungsgleichung
 f) Identität
 h) Identität
3. a) ...
 b) ...
4. a) keine Äquivalenzumformung
 b) Äquivalenzumformung
5. a) $x = 5$
 b) $x = 7$
 c) keine Lösung
 d) $x \in \mathbb{R}$
 e) $x = 5$
 f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
6. a) $p = 3$ keine Lösung
 $p \neq 3$ $x = \frac{p}{p-3}$
- b) $c = 0$ keine Lösung
 $c \neq 0$ $x = \frac{5c+5}{c}$
- c) $p = 2$ $x = 0$
 $p \neq 2$ $x = 1 - \frac{2px}{p-2}$
- d) $a = b = 0$ $x \in \mathbb{R}$
 $a = b \neq 0$ keine Lösung
 $a \neq b$ $x = \frac{a}{a-b}$
7. * a) $p = -1$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1/3\}$
 $p = \frac{1}{3}$ keine Lösung
 $(p \neq -1) \left(p \neq \frac{1}{3} \right)$ $x = \frac{1-p}{2}$
- b) $a = b = 0$ keine Lösung
 $a = b \neq 0$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $(a \neq b) \wedge (a \neq 0) \wedge (b \neq 0)$ $x = \frac{ab}{a-b}$
 $(a \neq b) \wedge ((a = 0) \vee (b = 0))$ keine Lösung

Gleichungen / Gleichungssysteme auf MAPLE

8. ...
 9. ...

10. a) siehe *Papula*
b) siehe *Papula*
MAPLE gibt nur **eine** von **unendlich vielen** Lösungen aus.
11. siehe *Papula*
12. Ein Maple-Musterfile "Textaufgaben Übung 1 (textaufgaben.mws)" zu den Teilaufgaben a), d), e) und f) finden Sie im Internet unter:
<http://www.tel.fh-htwchur.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...)
- a) Radius = 1.00 m
- b) Grundkante = 2.5 m
Höhe = 3.5 m
- c) ...
- d) Masse = 6 kg
(Hebelarmlänge links) : (Hebelarmlänge rechts) = 3 : 4
- e) Gesuchte Länge = 0.71 a
- f) Gesuchte Fläche = 1.66 r²