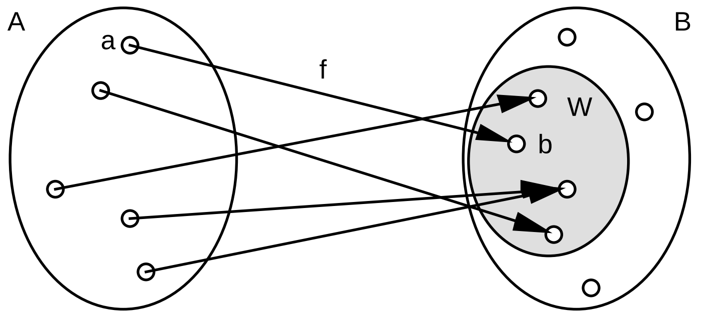
Funktionen

Definition und Beispiele

Def.: Eine **Funktion** f ist eine Vorschrift, die **jedem** Element a aus einer Menge A **genau ein** Element b aus einer Menge B zuordnet.



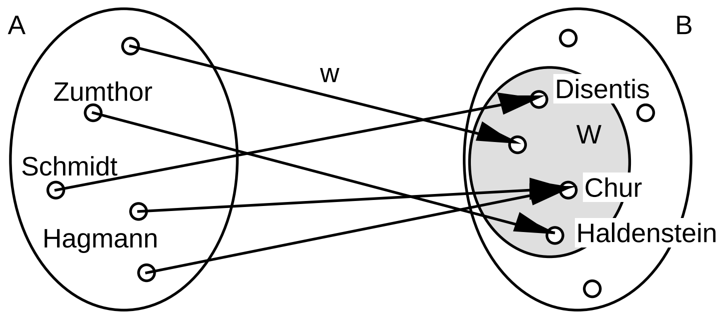
Schreibweise: f: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = f(a)$ ("f von a")

Die Menge A ist der **Definitionsbereich** (Definitionsmenge), die Menge B der **Zielbereich** (Zielmenge, Cobereich, Wertevorrat) und die Menge W der **Bildbereich** (Wertebereich, Wertemenge) der Funktion f.

b ist das zum Element a gehörige **Bildelement** (Funktionswert).

Bsp.: 1. A = Menge aller Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = w(a)$ = Offizielle Wohnsitzgemeinde von a



2. A = Menge aller Gebäude der Stadt Chur
B = {500, 501, 502, 503, ..., 2001, 2002, 2003, 2004}

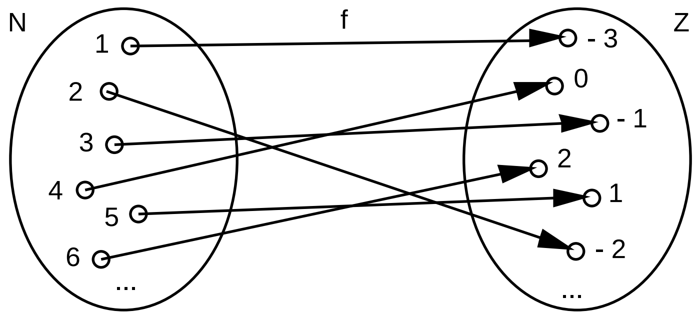
e: $A \rightarrow B$
$g \rightarrow j = e(g)$ = Jahr der Einweihung von g

3. A = B = Menge aller Punkte einer Ebene

S_g: $A \rightarrow A$
$P \rightarrow P' = S_g(P)$ = Bildpunkt von P bezüglich einer Geradenspiegelung an der Geraden g

4. $A = N$ (= Menge der natürlichen Zahlen)
$B = Z$ (= Menge der ganzen Zahlen)

f: $N \rightarrow Z$
$n \rightarrow y = f(n) = n - 4$



5. $A = R_0^+$ (= Menge der positiven reellen Zahlen inklusive 0)
$B = R$ (= Menge der reellen Zahlen)

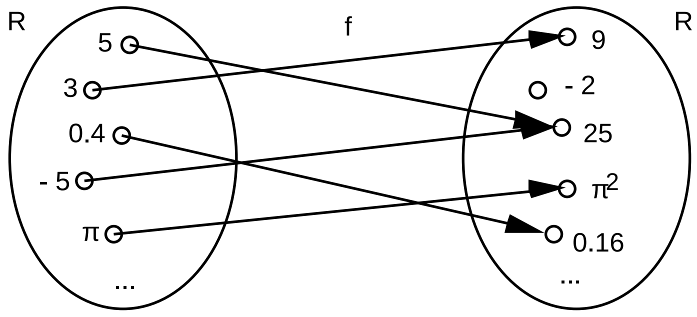
f: $R_0^+ \rightarrow R$
$x \rightarrow y = f(x) = \sqrt{x}$

6. $A = B = R$

p: $R \rightarrow R$
$x \rightarrow y = p(x) = \frac{x^3-3}{2x^2+1}$

Darstellung einer Funktion

Pfeildiagramm



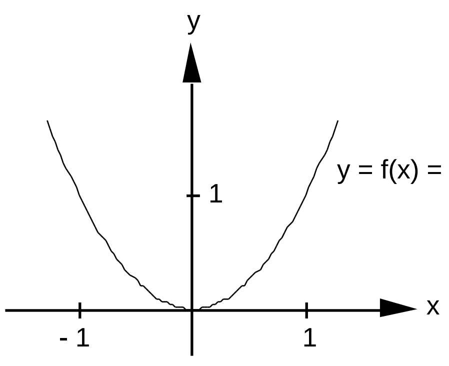
Wertetabelle

x	y
1	1
3	9
5	25
- 5	25
0.4	0.16
...	...

Funktionsvorschrift

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$

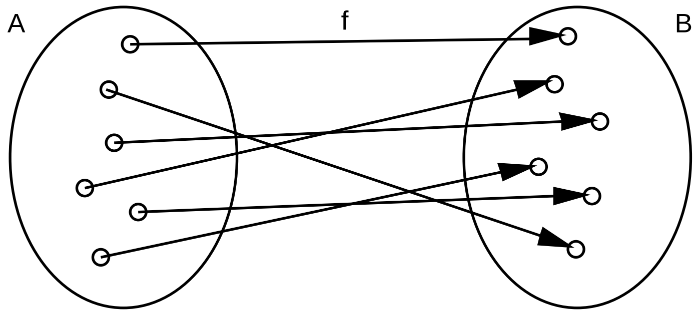
Graf



Umkehrfunktion

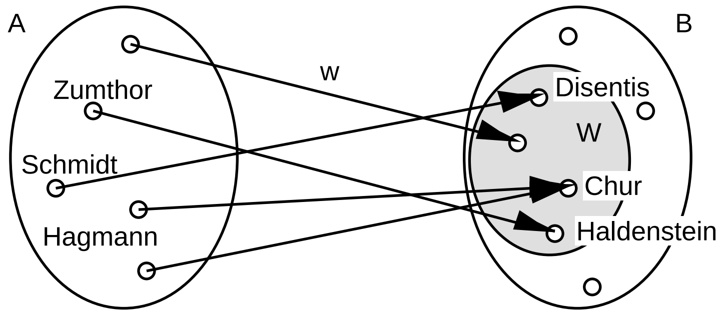
Def.: Eine Funktion f: A → B heisst **bijektiv**, falls

i) **jedes** Element b B als Bildelement auftritt, d.h. falls W = B.
ii) jedes Element b B Bildelement eines **einzigen** Elementes a A ist.



Bsp.: 1. A = Menge aller Bündner Architekten
B = Menge aller Schweizer Gemeinden

w: A → B
a → b = w(a) = Offizielle Wohnsitzgemeinde von a — nicht bijektiv



2. f: $R \to R$
$x \to y = f(x) = -x$ — bijektiv

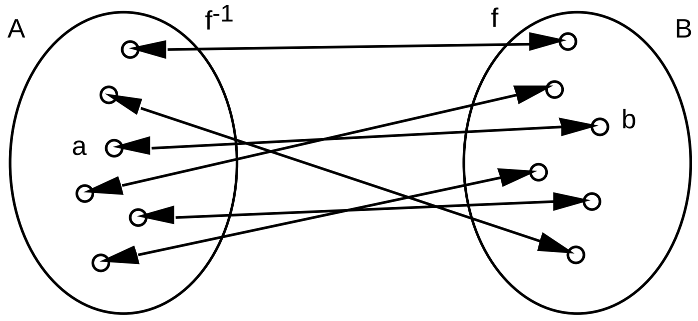
3. f: $R \to R$
$x \to y = f(x) = x^2$ — nicht bijektiv

Def.: Gegeben sei die bijektive Funktion

f: $A \rightarrow B$
$a \rightarrow b = f(a)$

Die **Umkehrfunktion** f^{-1} ordnet jedem Element b B dasjenige Element a A zu, welches durch die Funktion f dem Element b B zugeordnet wird.

f^{-1}: $B \rightarrow A$
$b \rightarrow a = f^{-1}(b)$



Bsp.: 1. Ausverkauftes Kino

A = Menge aller Kinobesucher
B = Menge aller Sitzplätze

f: $A \rightarrow B$
$x \rightarrow y = f(x)$ = Sitzplatz von Kinobesucher x

f^{-1}: $B \rightarrow A$
$y \rightarrow x = f^{-1}(y)$ = Kinobesucher auf Sitzplatz y

2. A = Z
B = {..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...}

f: $A \rightarrow B$
$x \rightarrow y = f(x) = 2x$

f^{-1}: $B \rightarrow A$
$y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$