Übung 12 Funktionen
Funktion als Abbildung, Funktion auf MAPLE

Lernziele

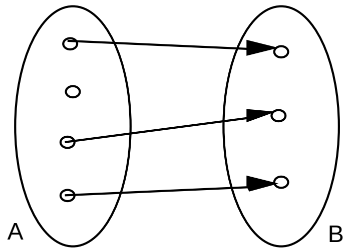
- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- den Bildbereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte vorgegebener Funktionen bestimmen können.
- mit dem Computerprogramm MAPLE eine Funktion definieren, deren Grafen zeichnen und deren Nullstellen bestimmen können.
- den Grafen einer Funktion charakterisieren können.
- angewandte Aufgaben zu Funktionen mit dem Computerprogramm MAPLE lösen können.

Aufgaben

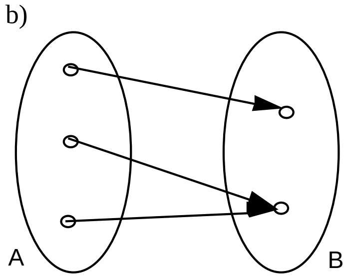
Funktion als Abbildung

1. Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion $A \to B$ ist:

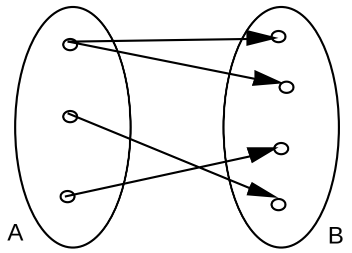
a)



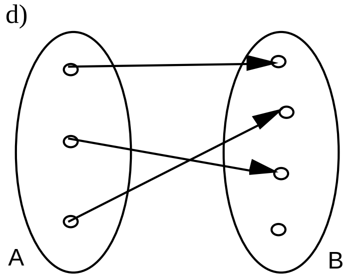
b)



c)



d)



e) A = Menge aller Häuser, B = Menge aller ArchitektInnen
$f\colon\ A \to B,\ h \to a = f(h)$ = ArchitektIn von h

f) A = Menge aller Vereine in der Schweiz, B = Menge aller SchweizerInnen
$p\colon\ A \to B,\ x \to y = p(x)$ = PräsidentIn von x

g) A = {1974, 1975, ... , 1983, 1984}
B = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
$f\colon\ A \to B,\ j \to m = f(j)$ = Mensch mit Jahrgang j

h) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
B = {1974, 1975, ... , 1983, 1984}
$j\colon\ A \to B,\ m \to j = j(m)$ = Jahrgang von Mensch m

i) $f\colon\ R \to R,\ x \to y = f(x) = x^2$

j) $f\colon\ R^+ \to R,\ x \to y = f(x)$ = Zahl, welche quadriert gleich x ergibt

k) $f\colon\ N \to N,\ x \to y = f(x)$ = Teiler von x

2. Gegeben sind die Mengen A und B.
Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion $A \to B$.

a) A = Menge aller Tage des Jahres 2001
$B = \mathbb{R}$

b) A = Menge aller Schweizer Firmen
B = Menge aller Schweizer Kantone

c) A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Dreiecke

d) $A = \{-3, 1, 4, 7, 11, 14\}$
$B = \{-6, 2, 8, 14, 22, 28\}$

e) $A = \mathbb{R}^-$
$B = \mathbb{R}^+$

3. Bestimmen Sie die Bildmenge W der folgenden Funktionen:

a) A = {Januar, Februrar, März, ..., Dezember}
B = {A, B, C, ..., Z}
f: $A \to B$, $m \to b = f(m)$ = Anfangsbuchstabe des Monats m

b) A = Menge aller Nachbarländer der Schweiz
B = Menge aller europäischen Städte
h: $A \to B$, $n \to s = h(n)$ = Hauptstadt des Nachbarlandes n

c) A = Menge aller 3-komponentigen Vektoren
$B = \mathbb{R}_0^+$
b: $A \to B$, $\vec{a} \to a = b(\vec{a})$ = Betrag des Vektors $\vec{a}$

d) Funktion f aus Aufgabe 1 i)

4. Gegeben ist die Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie jeweils die folgenden Funktionswerte:

i) $f(0)$	ii) $f(1)$	iii) $f(-1)$
iv) $f(a)$	v) $f(x+a)$	vi) $f(3-f(-3))$

Funktion auf MAPLE

5. Studieren Sie anhand des Maple-Files "funktion.mws", wie man mit dem Computerprogramm MAPLE
- eine Funktion definiert.
- den Grafen einer Funktion zeichnet.
- die Nullstelle(n) einer Funktion bestimmt.

Sie finden das File "funktion.mws" unter
http://www.tel.fh-htwchur.ch/˜borer → Mathematik → Unterlagen (...)

6. Variieren Sie im File "funktion.mws" die Koeffizienten m und b der **linearen Funktion** sowie die Koeffizienten a_2, a_1, a_0 der **quadratischen Funktion**.

Zeichnen Sie jeweils den Grafen der Funktion, und bestimmen Sie die Nullstellen.

7. (siehe Seite 3)

7. Eine **ganz rationale Funktion** n-ten Grades hat die Form

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a) Zeichnen Sie mit MAPLE einige Grafen von ganz rationalen Funktionen.

b) Versuchen Sie, die Grafen in Worten zu beschreiben.

c) An welcher Eigenschaft des Grafen lässt erkennen, ob der Grad n der Funktion eine gerade oder eine ungerade Zahl ist?

8. Zeichnen Sie mit MAPLE Grafen von **gebrochen rationalen Funktionen**, **trigonometrischen Funktionen, Expontential- und Logarithmus-Funktionen**.

Definitionen von diesen Funktionstypen finden Sie im Buch *Papula*.

Lösungen

1. a) keine Funktion (Zuordnung nicht definiert für alle a   A)
   b) Funktion
   c) keine Funktion (Zuordnung nicht eindeutig)
   d) Funktion
   e) keine Funktion (f nicht oder nicht eindeutig definiert für alle h   A)
   f) keine Funktion (p nicht definiert für alle x   A)
   g) keine Funktion (f nicht eindeutig)
   h) Funktion
   i) Funktion
   j) keine Funktion (f nicht eindeutig)
   k) keine Funktion (f nicht eindeutig)

2. a) m: $A \to B$, $d \to T = m(d)$ = Maximaltemperatur in Chur am Tage d
   b) s: $A \to B$, $f \to k = s(f)$ = Kanton, an welchen f die meisten Steuern zahlen muss
   c) f: $A \to B$, $v \to d = f(v)$ = gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie v
   d) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = 2x$
   e) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = -x$

3. a) W = {A, D, F, J, M, N, O, S}
   b) W = {Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}
   c) W = B
   d) $W = R_0^+$

4. a)
   i) $f(0) = 0^3-0 = 0$ ii) $f(1) = 1^3-1 = 0$
   iii) $f(-1) = (-1)^3-(-1) = 0$ iv) $f(a) = a^3-a$
   v) $f(x+a) = (x+a)^3-(x+a)$
   vi) * $f\big(3-f(-3)\big) = f\Big(3-\big((-3)^3-(-3)\big)\Big) = f\big(3-(-24)\big) = f(27) = 27^3-27 = 19'656$

   b)
   i) $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$ ii) $f(1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$
   iii) $f(-1) = \frac{(-1)^2}{-1+1}$ nicht definiert iv) $f(a) = \frac{a^2}{a+1}$
   v) $f(x+a) = \frac{(x+a)^2}{x+a+1}$
   vi) $f\big(3-f(-3)\big) = f\left(3 - \frac{(-3)^2}{-3+1}\right) = f\left(3 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right) = f\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2}{\frac{15}{2}+1} = \frac{225}{34}$

5. ...

6. ...

7. a) ...
   b) ...
   c) Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$:

   n gerade: $f(x) \to +\infty$ sowohl für $x \to +\infty$ als auch für $x \to -\infty$
   oder
   $f(x) \to -\infty$ sowohl für $x \to +\infty$ als auch für $x \to -\infty$

   n ungerade: $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$
   oder
   $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$

8. ...