Übung 10 Kegelschnitte Kreis, (Kugel)

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die Gleichung des Kreises kennen und verstehen.
- aus bekannten Eigenschaften eines Kreises dessen Gleichung bestimmen können.
- verstehen, dass nur ein Teil eines Kreises als Graf einer Funktion aufgefasst werden kann.
- die Kreisgleichung zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

Kreis

1. Der Kreis ist definiert als Menge aller Punkte P einer Ebene, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben. M ist der Kreismittelpunkt und r der Kreisradius.

   a) Zeigen Sie, dass die Gleichung des Kreises in der x-y-Ebene mit dem Mittelpunkt M(0|0) und dem Radius r = 2 gegeben ist durch
   $$x^2 + y^2 = 4$$

   b) Zeigen Sie, dass die Gleichung des Kreises in der x-y-Ebene mit dem allgemeinen Mittelpunkt $M(x_0|y_0)$ und dem allgemeinen Radius r gegeben ist durch
   $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

   Hinweis:

   Der Betrag des Vektors $\vec{MP}$ muss für jeden Punkt P des Kreises gleich r sein.

2. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r:

   a) M(0|0) r = 2

   b) M(0|1) r = 3

   c) M(2|3) r = 4

   d) M(-4|1) r = 5

3. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit den jeweiligen Eigenschaften:

   a) Der Kreis hat den Mittelpunkt M(15|8) und geht durch den Koordinatenursprung.

   b) Der Kreis hat den Mittelpunkt M(-8|6) und geht durch den Punkt P(-5|2).

   c) Der Kreis geht durch den Punkt P(-2|4) und berührt die y-Achse bei y = 8.

   d) Der Kreis geht durch den Punkt P(1|2) und berührt beide Koordinatenachsen.

   e) Der Kreis geht durch die Punkte $P_1(11|2)$ und $P_2(7|-2)$, und der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Geraden mit der Gleichung y = 3x - 9.

   f) Der Kreis geht durch die Punkte $P_1(25|10)$, $P_2(-10|15)$ und $P_3(29|2)$.

   g) Der Kreis geht durch den Punkt P(10|1) und berührt sowohl die y-Achse als auch die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 11$.

4. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises k mit der Geraden g:

a) k: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ g: $y = x$

b) k: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ g: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

5. Die obere Hälfte eines Kreises in der x-y-Ebene, d.h. der obere Halbkreis, kann als Graf einer Funktion f aufgefasst werden.

a) Erklären Sie, warum man nicht den ganzen Kreis als Graf einer Funktion auffassen kann.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung derjenigen Funktion f, deren Graf der obere Halbkreis des folgenden gegebenen Kreises ist:
i) $x^2 + y^2 = 4$
ii) $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$

c) Bestimmen Sie für die beiden Funktionen in b) den grösstmöglichen Definitionsbereich und den Wertebereich.

6. Gegeben sind der Kreis k und die Gerade g:

k: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
g: $x + 2y = 5$

Bestimmen Sie

a) die Koordinaten des Mittelpunktes sowie den Radius des Kreises k.

b) die Länge der Sehne, die der Kreis k aus der Gerade g herausschneidet.

Kugel

7. * Bestimmen Sie die Gleichung einer Kugel mit dem Mittelpunkt $M(x_0|y_0|z_0)$ und dem Radius r.

Hinweis:
Überlegen Sie sich, dass es eine Analogie gibt zwischen einem Kreis in der zweidimensionalen x-y-Ebene und einer Kugel im dreidimensionalen x-y-z-Raum.

8. * Eine Kugel wird mit der x-y-Ebene geschnitten.

a) Zeigen Sie, dass die Schnittkurve ein Kreis ist.
Hinweis:
Kombinieren Sie die Gleichungen der Kugel und der x-y-Ebene, und stellen Sie fest, dass daraus die Gleichung eines Kreises resultiert.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, welcher entsteht, wenn man die folgende Kugel mit der x-y-Ebene schneidet:
Kugel: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$

Lösungen

1. $\vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

   $|\vec{MP}|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

2. a) $x^2 + y^2 = 4$
   b) $x^2 + (y-1)^2 = 9$
   c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
   d) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$

3. a) $(x - 15)^2 + (y - 8)^2 = 289$
   b) $(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 25$
   c) $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$
   d) 2 mögliche Kreise
   $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
   $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
   e) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 16$
   f) $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 625$
   g) 2 mögliche Kreise
   $(x - 10)^2 + (y + 9)^2 = 10$
   $(x - 5)^2 + (y - 15)^2 = 25$

4. a) $S_1(0|0)$, $S_2(1|1)$
   b) $S_1(5|-2)$, $S_2\left(\frac{9}{5} \,\middle|\, -\frac{2}{5}\right)$

5. a) ...
   b) i) $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
   ii) $y = f(x) = \sqrt{25 - (x + 5)^2} + 8$
   c) i) $D = [-2,2]$ $W = [0,2]$
   ii) $D = [-10,0]$ $W = [8,13]$

6. a) $M(-2|1)$, $r = 5$
   b) $s \approx 7.5$

7. * $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

8. * a) Kugel: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
   x-y-Ebene: $z = 0$
   $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 - z_0^2$
   Dies ist die Gleichung eines Kreises in der x-y-Ebene.
   b) mit a): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$
   Mittelpunkt $M(-1|2)$, Radius $r = 4$