Übung 2 Vektoren
Skalarprodukt, Vektorprodukt

Lernziele

- das Skalarprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Skalarproduktes anwenden können.
- das Skalarprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- das Vektorprodukt zweier Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, bestimmen können.
- die Rechengesetze des Vektorproduktes anwenden können.
- das Vektorprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.

Aufgaben

Skalarprodukt

1. *Papula*: 129/10, 129/11, 130/17

2. Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge ein Rechteck bilden:
   A(7|6|3) B(4|10|1) C(-2|6|2) D(1|2|4)

3. Bestimmen Sie den Wert von k, damit die Vektoren $\vec a$ und $\vec b$ orthogonal werden:

   a) $\vec a = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b) $\vec a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3k \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \\ 2k \end{pmatrix}$

4. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec a$, $\vec b$ und $\vec c$:

   $\vec a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie den Wert von k, damit gilt:
   $(\vec a + k\cdot\vec b) \quad \vec c$

5. Bestimmen Sie die Komponenten eines dreidimensionalen Vektors vom Betrag 20, welcher mit der x-Achse und mit der y-Achse je einen Winkel von 60° einschliesst.

6. Der Vektor $\vec x$ soll als Summe zweier Vektoren $\vec y$ und $\vec z$ geschrieben werden.
   $\vec y$ soll dabei parallel zu $\vec a$ und $\vec z$ senkrecht zu $\vec b$ sein:

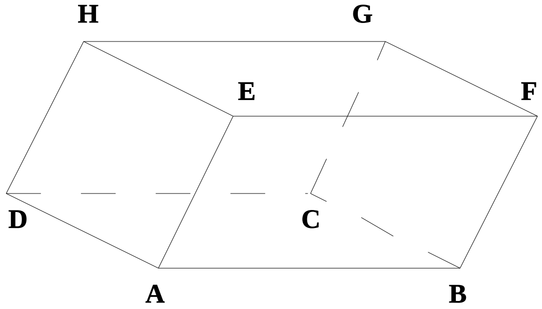
   $\vec x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie $\vec y$ und $\vec z$.

Vektorprodukt

7. *Papula*: 131/23, 131/24, 132/26

8. Der Spat ABCDEFGH wird aufgespannt durch die drei Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$:



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Durch die Eckpunkte B, D und G wird eine Ebene gelegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das vom Spat aus dieser Ebene geschnitten wird.

9. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Einheitsvektoren, die sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ senkrecht stehen.

10. Eine Pyramide bestehe aus der Basis ABC und der Spitze S:

A(2|4|-7) B(3|4|-9) C(-1|-5|5) S(8|4|8)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, welcher auf der über S hinaus verlängerten Pyramidenhöhe liegt und von S den Abstand 7 hat.

Lösungen

1. siehe *Papula*

2. ...

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
   a) $k = -2$
   b) $k = -1$

4. $k = 1$

5. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix}$

6. $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

7. siehe *Papula*
   zu 132/26: Das Spatprodukt $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ gehört nicht zu den Lernzielen des Unterrichts. Damit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene liegen, muss das Vektorprokukt von zwei der drei Vektoren senkrecht zum dritten Vektor stehen, also z.B. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

8. $A_{\Delta BDG} = \frac{1}{2} \left| \vec{BD} \times \vec{BG} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{608} = 12.3$

9. $\left.\begin{array}{l} \vec{x} = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ |\vec{x}| = 1 \end{array}\right\}$ $\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = -\frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

10. $\vec{SP}$ steht senkrecht zur Pyramidenbasis, ist daher ein Vielfaches von $\vec{AB} \times \vec{AC}$ und hat Betrag 7
    $\left.\begin{array}{l} \vec{SP} = k \cdot \left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right) \\ \left|\vec{SP}\right| = 7 \\ \vec{OP} = \vec{OS} + \vec{SP} \end{array}\right\}$ $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ P(14|6|11)