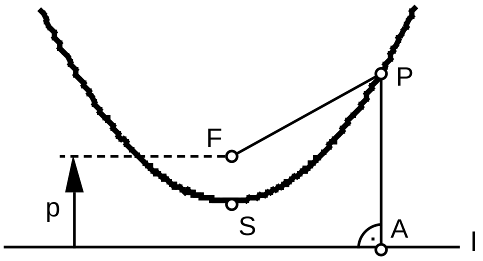
Übung 28   Kegelschnitte Parabel

Lernziele

- neue Sachverhalte erarbeiten können.
- verstehen, dass eine Parabel als Graf einer quadratischen Funktion aufgefasst werden kann.
- mit Hilfe der Parabelgleichung konkrete Problemstellungen lösen können.

Aufgaben

1. Die Parabel ist definiert als Menge aller Punkte P, welche von einem gegebenen Punkt F und einer gegebenen Geraden l den gleichen Abstand haben (vgl. Unterricht):



$\overline{PF} = \overline{PA}$

Der Punkt F heisst **Brennpunkt**, die Gerade l **Leitgerade** und der Punkt S **Scheitelpunkt** der Parabel.

a) Begründen Sie, dass bei jeder Parabel der Scheitelpunkt genau in der Mitte zwischen dem Brennpunkt F und der Leitgeraden l liegen muss.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit den folgenden Eigenschaften:
- Der Scheitelpunkt S liegt im Koordinatenursprung, d.h. S(0|0).
- Die Leitgerade l verläuft parallel zur x-Achse.
- Die Parabel ist in positive Richtung geöffnet.

Vorgehen:
i) Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes F an, und zwar in Abhängigkeit des Parameters p.
ii) Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an, und zwar in Abhängigkeit des Parameters p und der Koordinaten x und y des Punktes P(x|y).
iii) Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren $\vec{PF}$ und $\vec{PA}$.
iv) Drücken Sie nun die Bedingung $\overline{PF} = \overline{PA}$ vektoriell in der Form $|\vec{PF}|^2 = |\vec{PA}|^2$ aus, und setzen Sie die Komponenten von $\vec{PF}$ und $\vec{PA}$ ein.
v) Vereinfachen Sie die in iv) erhaltene Gleichung.
vi) Zeigen Sie, dass die Parabel als Graf einer Funktion aufgefasst werden kann. Geben Sie die Funktionsgleichung an, und beurteilen Sie, um was für einen Funktionstyp es sich handelt.

c) * Bestimmen Sie analog zu b) die Gleichung der Parabel mit den folgenden Eigenschaften:
- Der Scheitelpunkt S hat die allgemeine Lage S(x|y).
- Die Leitgerade l verläuft parallel zur x-Achse.

d) * Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion hat die allgemeine Form

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Zeigen Sie, dass der Graf jeder quadratischen Funktion eine Parabel ist.

Hinweise:
i) Vergleichen Sie die Funktionsgleichung

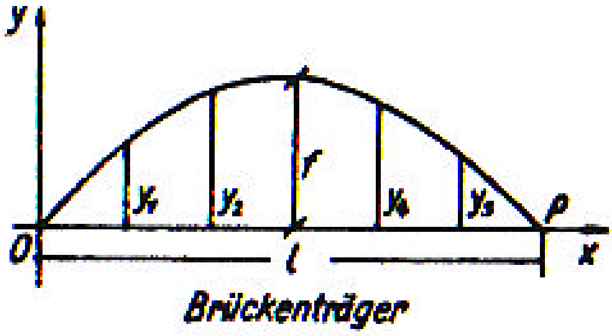
$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit der in c) hergeleiteten Gleichung der Parabel

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$$

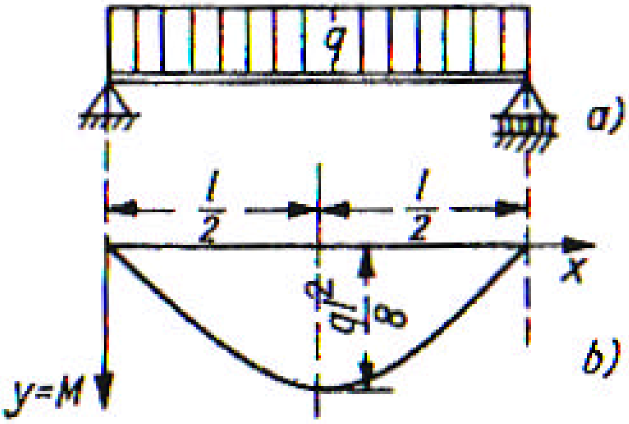
ii) Wenn es gelingt, zu jeder Wahl für die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 einen Parameterwert p und Koordinaten x_0 und y_0 für den Scheitelpunkt S zu finden, ist bewiesen, dass der Graf jeder quadratischen Funktion eine Parabel ist.

2. Der Bogen einer Brücke ist ein Parabelträger von der Spannweite l = 20 m und der Pfeilhöhe f = 5 m.



Bestimmen Sie die Länge der sechs in gleichen Abständen angebrachten Vertikalstäbe.

3. Für den in Bild a) dargestellten, mit einer konstanten Streckenlast q belasteten Träger auf zwei Stützen gibt Bild b) den Verlauf des Biegemomentes M, die sogenannte Biegemomentenlinie wieder.
Die Biegemomentenlinie ist eine Parabel:



Stellen Sie gemäss den Angaben des Bildes 2b die Gleichung dieser Parabel auf, wobei der Ursprung des Koordinatensystems im linken Auflager liegen soll.

4. *Papula* Aufgabe 302/4

5. Gegeben sind die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ und der Punkt $P_0(1|5)$ innerhalb der Parabel.
Bestimmen Sie die Gleichung der Sehne, die durch P_0 halbiert wird.

Vorgehen:
i) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, welches die gesuchten Koeffizienten der Sehnengleichung enthält.
ii) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Computerprogramm MAPLE auf.

6. Die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ ist nach unten zu verschieben, bis sie den Kreis um O(0|0) mit Radius 2 im IV. Quadranten berührt.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte sowie die Gleichung der verschobenen Parabel.

Lösungen

1. a) Da S ein Punkt der Parabel. ist, gilt nach Definition der Parabel: $\overline{SF} = \overline{SA} = \frac{|p|}{2}$

b) i) $F\left(0 \,\middle|\, \frac{p}{2}\right)$ ii) $A\left(x \,\middle|\, -\frac{p}{2}\right)$

iii) $\vec{PF} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{p}{2} - y \end{pmatrix}$ $\vec{PA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{p}{2} - y \end{pmatrix}$ iv) $(-x)^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2 = 0^2 + \left(-\frac{p}{2} - y\right)^2$

v) $x^2 = 2py$ vi) $y = f(x) = \frac{1}{2p} x^2$ quadr. Fkt.

c) * i) ... ii) ...
iii) ... iv) ...

v) $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ vi) $y = f(x) = \frac{1}{2p}(x-x_0)^2 + y_0$ quadr. Fkt.

d) * ...

2. $y_1 = y_5 = 2.78$ m $y_2 = y_4 = 4.44$ m $y_3 = f = 5.00$ m

3. $y = -\frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{ql^2}{8}$

4. siehe *Papula*

5. i) Parabel p: $y = \frac{1}{2}x^2$

Sehne s: $y = mx + q$
Anfangs- und Endpunkt der Sehne: $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$

Gleichungssystem:

P_1	g:	$y_1 = mx_1+q$
P_1	p:	$y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$
P_2	g:	$y_2 = mx_2+q$
P_2	p:	$y_2 = \frac{1}{2}x_2^2$
P_0	g:	$5 = m+q$
$\overline{P_1P_0} = \overline{P_0P_2}$:		$x_2-1 = 1-x_1$

ii) Lösungen des Gleichungssystems:
$(m = 1, q = 4, x_1 = -2, y_1 = 2, x_2 = 4, y_2 = 8)$,
$(m = 1, q = 4, x_1 = 4, y_1 = 8, x_2 = -2, y_2 = 2)$
Sehne: $y = x + 4$

6. Die Gleichungen des Kreises und der verschobenen Parabel lauten
$x^2 + y^2 = 4$ bzw. $y = \frac{1}{2}x^2 + c$
Kombination der beiden Gleichungen führt auf die quadratische Gleichung
$y^2 + 2y - (4 + 2c) = 0$
deren Diskriminante 20 + 8c gleich Null sein muss

$c = -\frac{5}{2}$

Verschobene Parabel: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$

Berührungspunkte: $P_1\left(\sqrt{3}|-1\right)$, $P_2\left(-\sqrt{3}|-1\right)$