Übung 19 Repetition Gleichungen, Funktionen, Vektoren

Aufgaben

Gleichungen, Funktionen

1. Der Graf einer linearen Funktion hat die Steigung -2 und enthält den Punkt P(-3|5).
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung y = f(x) = ...

2. Gegeben ist die folgende Funktion f:
   $$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
   $$x \rightarrow y = f(x) = (k-x)(x-2) - k(x^2-2) - 1 \quad (k \in \mathbb{R}, \mathbb{R} = \text{Menge der reellen Zahlen})$$
   Bestimmen Sie, für welche Werte von k die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt.

3. Eine Parabel in der x-y-Ebene liegt achsensymmetrisch zur y-Achse, geht durch den Koordinatenursprung und durch den Punkt P(1|2).
   Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

4. Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Aussagen wahr ist:
   a) Die Gleichung $\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2}$ ist eine Identität.
   b) Jede Umformung, die eine Gleichung in eine neue Gleichung überführt, welche mit der ursprünglichen Gleichung gemeinsame Lösungen hat, ist eine Äquivalenzumformung.
   c) Jede Gerade in der x-y-Ebene kann als Graf einer linearen Funktion y = f(x) aufgefasst werden.

5. Gegeben ist die folgende Funktion f:
   $$f: A \rightarrow B$$
   $$x \rightarrow y = f(x) = x^2+1$$
   Bestimmen Sie
   a) $f\left(\frac{3}{2}\right)$
   b) $f\left(f\left(\sqrt{2}\right)-3\right)$
   c) $f\left(x^2+1\right)$

6. Gegeben ist die folgende Funktion f:
   $$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
   $$x \rightarrow y = f(x) = 2x^2 - x$$
   Bestimmen Sie alle möglichen Werte für x, für welche der Funktionswert 1 ist.

Vektoren

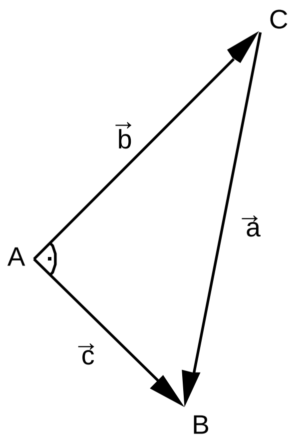
7. Betrachten Sie die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} s \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie die y-Komponente r des Vektors $\vec{a}$ und die x-Komponente s des Vektors $\vec{b}$, so dass die folgenden beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:
   - $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Rechteck auf.
   - Jeder senkrecht zum Rechteck stehende Vektor hat die Eigenschaft, dass er parallel zur y-z-Ebene liegt.

8. Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Aussagen wahr ist:
   a) Das Skalarprodukt zweier senkrechter Vektoren ist der Nullvektor.
   b) Der Betrag des Vektorprodukts zweier senkrechter Vektoren ist gleich dem Produkt der Beträge der beiden Vektoren.

9. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ u \end{pmatrix}$$

Wie gross müssen x, y, z und u sein, damit sich das Vektorendreieck ABC gemäss folgender Grafik bilden lässt?



10. In der x-y-Ebene sei ein Quadrat OCAB gegeben, dessen Ecke O im Koordinatenursprung liegt und dessen Ecke A(1|7) diagonal zu O liegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte B und C nur mit Hilfe der Vektorgeometrie.

11. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von λ und γ steht der Vektor $\vec{v} = \left(\vec{a} + \lambda\,\vec{g}\right) - \left(\vec{b} + \gamma\,\vec{h}\right)$ senkrecht auf $\vec{g}$ und $\vec{h}$?

12. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zerlegen Sie den Vektor $\vec{v}$ in eine Summe von zwei Vektoren, von denen der eine parallel und der andere senkrecht zum Vektor $\vec{a}$ verlaufen sollen.

13. Die Kugel K mit dem Zentrum M(3|1|1) und dem Radius r = 11 wird durch paralleles, vertikal von oben, d.h. in Richtung der negativen z-Achse einfallendes Licht beleuchtet.
Wo befindet sich auf K der Schatten des Punktes A(9|3|12)?

Lösungen

1. $y = f(x) = -2x - 1$

2. $k_1 = 0$, $k_1 = -1$

3. $y = 2x^2$

4. a) falsch
   b) falsch
   c) falsch

5. a) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$
   b) $f\left(f\left(\sqrt{2}\right) - 3\right) = 1$
   c) $f\left(x^2+1\right) = x^4 + 2x^2 + 2$

6. $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

7. $r = -2$, $s = 26$

8. a) falsch
   b) wahr

9. 2 Lösungen
   $x_1 \approx 5.62$, $y_1 = -6$, $z_1 \approx 4.62$, $u_1 = 1$
   $x_2 \approx -4.62$, $y_2 = -6$, $z_2 \approx -5.62$, $u_2 = 1$

10. $B(4|3)$, $C(-3|4)$

11. $\lambda = -1$, $\gamma = 1$

12. $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

13. $A'(9|3|10)$