Übung 15 — Skalarprodukt, Angewandte Aufgaben

Lernziele

- das Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen können.
- konkrete Problemstellungen mit Hilfe des Skalarproduktes lösen können.

Aufgaben

1. *Papula* Aufgaben
   a) 129/10
   b) 129/11
   c) 129/12
   d) 130/15
   e) 130/17
   f) 131/20

2. Der Vektor $\vec{AB}$ werde auf die Gerade (CD) projiziert:
   A(1|-2|3) B(5|-8|1) C(2|4|3) D(-1|9|1)
   Bestimmen Sie den entstandenen Projektionsvektor sowie seinen Betrag.

3. Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Vektoren, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:
   - $\vec{u} \neq \vec{0}$
   - $\vec{v} \neq \vec{0}$
   - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

   Was kann man über $\vec{u}$ aussagen?

4. Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge ein Rechteck bilden:
   A(7|6|3) B(4|10|1) C(-2|6|2) D(1|2|4)

5. Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H die Ecken eines Würfels sind:
   A(0|11|7) B(10|21|2) C(20|10|0) D(10|0|5)
   E(5|13|21) F(15|23|16) G(25|12|14) H(15|2|19)

6. Bestimmen Sie den Wert von k, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal werden:
   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3k \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \\ 2k \end{pmatrix}$

7. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:
   $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
   Bestimmen Sie den Wert von k, damit gilt:
   $(\vec{a} + k \cdot \vec{b}) \quad \vec{c}$

8. Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{x}$, für welche gilt:

$$\vec{x} \quad \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ und } |\vec{x}| = 2$$

9. Bestimmen Sie die Komponenten eines dreidimensionalen Vektors vom Betrag 20, welcher mit der x-Achse und mit der y-Achse je einen Winkel von 60° einschliesst.

10. Für die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left(\vec{a}+\frac{7}{2}\vec{b}\right) = 0 \text{ und } |\vec{a}| = 2|\vec{b}|$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

11. Von zwei Vektorern $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die Beträge und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben:

$$|\vec{a}| = 12 \qquad |\vec{b}| = 8 \qquad \varphi = \quad (\vec{a},\vec{b}) = 30°$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{c} := 3\vec{a} - 5\vec{b}$ und $\vec{d} := 7\vec{a} + \vec{b}$

12. Der Vektor $\vec{x}$ soll als Summe zweier Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ geschrieben werden. $\vec{y}$ soll dabei parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{z}$ senkrecht zu $\vec{b}$ sein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\vec{y}$ und $\vec{z}$.

13. Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen in einer Ebene, und es gilt:

$$|\vec{a}| = 2 \qquad |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \qquad \varphi = \quad (\vec{a},\vec{b}) = 120°$$

Der Vektor $\vec{c}$ soll als Summe von Vielfachen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ geschrieben werden, d.h.

$$\vec{c} = p\cdot\vec{a} + q\cdot\vec{b}$$

so dass bei senkrechter Projektion von $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ auf die Richtung von $\vec{d} = \vec{a} - 2\cdot\vec{b}$ der Nullvektor entsteht. Bestimmen Sie die Faktoren p und q.

Lösungen

1. siehe *Papula*

2. $\vec{AB}_{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\left|\vec{AB}_{CD}\right| = \sqrt{38} = 6.1...$

3. $\vec{u}$ $\vec{v}$

4. …

5. …

6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
   a) $k = -2$
   b) $k = -1$

7. $k = 1$

8. $\vec{x}_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix}$

10. $\phi = 146.4°$

11. $\varphi = \ (\vec{c}, \vec{d}) = 88.6°$

12. $\vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

13. 1. Lösung: $p_1 = 0$, $q_1 = 1$
    2. Lösung: $p_2 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = 0$