

Übung 14 Skalarprodukt Projektion, Rechengesetze

Lernziele

- neue Sachverhalte erarbeiten können.
- die Rechengesetze des Skalarproduktes kennen und verstehen.

Aufgaben

1. Im Unterricht wurde gezeigt, dass der Projektionsvektor b_a , den man durch Projektion von b auf a erhält, gegeben ist durch

$$b_a = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a$$

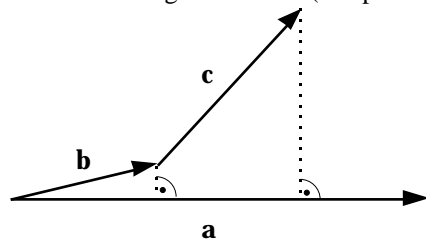
Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung, dass die folgende Aussage richtig ist:
"Der Betrag des Skalarproduktes eines Vektors x mit dem Einheitsvektor e ist gleich dem Betrag des Projektionsvektors x_e ."

2. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt das **Distributivgesetz** erfüllt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Vorgehen:

- Betrachten Sie die folgende Grafik (Skriptum Geometrie-TBM, Seite 67):



- Überlegen Sie sich anhand der Grafik, dass gilt $(b + c)_a = b_a + c_a$
- Drücken Sie die drei Projektionsvektoren $(b + c)_a$, b_a und c_a durch die Formel in der Aufgabe 1 aus.
- Formen Sie die erhaltene Gleichung um, bis Sie die Beziehung $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ erhalten.

3. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt die folgende **Rechenregel** erfüllt:

$$k \cdot (a \cdot b) = (k \cdot a) \cdot b = a \cdot (k \cdot b) \quad (k \in \mathbb{R})$$

Vorgehen:

- Beweisen Sie das Rechengesetz zuerst für $k=2$.
- Überlegen Sie sich dann, dass das Rechengesetz für ein beliebiges $k>0$ gelten muss.
- Überlegen Sie sich schliesslich, dass das Rechengesetz auch für alle $k<0$ gilt.

4. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt die folgende **Rechenregel** erfüllt:

$$(k+l) \cdot (a \cdot b) = k \cdot (a \cdot b) + l \cdot (a \cdot b) \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

Vorgehen:

- Beweisen Sie das Rechengesetz zuerst für $k=2$ und $l=3$.
- Überlegen Sie sich dann, dass das Rechengesetz für beliebige k und l gelten muss.

Lösungen

1. $x_e = \frac{x \cdot e}{|e|^2} \cdot e = (x \cdot e) \cdot e$
 $|x_e| = |(x \cdot e) \cdot e| = |x \cdot e| \cdot |e| = |x \cdot e|$

2. ...

3. ...

4. ...