Übung 4 Funktionen
Zusammenhang Funktion - Gleichung

Lernziele

- den Zusammenhang zwischen der Anzahl Nullstellen einer Funktion und der Anzahl Lösungen einer entsprechenden Gleichung verstehen.
- die Formel zur Lösung einer quadratischen Gleichung kennen.
- eine quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel von Hand lösen können.
- angewandte Aufgaben zur linearen und quadratischen Funktion lösen können.

Aufgaben

1. Der Graf einer quadratischen Funktion f: R $\rightarrow$ R, x $\rightarrow$ y = f(x) = $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ist eine Parabel (vgl. *Papula*, Seiten 183 ff.).
Beurteilen Sie, was man daraus über die Anzahl Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ aussagen kann.

2. Gegeben sei die folgende Aufgabenstellung:
"Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Grafen der Funktion $y = f(x) = \dfrac{3x^8-2x^5+x-6}{x^6-2x^4+1}$ *mit der Geraden* $y = 1$*."*
Diese Aufgabenstellung kann auf zwei Arten umformuliert werden:
"Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion ... ."
"Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung ... ."
Vervollständigen Sie die beiden Sätze.

3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben von Hand und mit Hilfe der Formel zur Bestimmung der Lösung(en) einer quadratischen Gleichung (siehe Aufgabe 9):
a) *Papula* Aufgabe 39/1 ("Zu Abschnitt 3")
b) *Papula* Aufgabe 39/2 ("Zu Abschnitt 3")

4. Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung von Hand und mit Hilfe der Lösungsformel:
$x^2 + x + a = 0$
Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen reellen Werte für den Parameter a.

5. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen, ohne die Lösungsformel zu verwenden:
a) $(x-1)(x+3) = 0$
b) $2x^2 - 8 = 0$
c) $3x^2 = x - 2x^2$

6. Gegeben sind die Gleichungen einer Parabel und einer Geraden.
Bestimmen Sie den/die Schnittpunkt(e) der Parabel mit der Geraden:
Parabel: $y = \frac{1}{4}x^2$
Gerade: a) $y = x + 3$
b) $y = x - 1$
c) $y = x - 3$

7. Gegeben sind die Gleichungen einer Parabel und einer Geraden. Die Gleichungen enthalten einen Parameter a.
Bestimmen Sie den/die Wert(e) des Parameters a, damit die Gerade eine Tangente der Parabel ist.
Parabel: $y = ax^2 + ax + 1$
Gerade: $y = x + a$

8. * Zwei Parabeln p_1 und p_2 sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:
• p_1 und p_2 berühren sich im Punkt (1|2).
• p_1 läuft durch die Punkte (0|0) und (-2|8).
• p_2 läuft durch den Punkt (0|-3).
Das Ziel der Aufgabe besteht darin, die Koeffizienten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 in den Funktionsvorschriften für die beiden Parabeln zu finden:
p_1: $y = p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$
p_2: $y = p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, in welchem die gesuchten Koeffizienten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 als Unbekannte vorkommen.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit MAPLE auf.

9. * Zur Bestimmung der allfälligen Lösung(en) der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) gibt es die folgende Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Studieren Sie die folgende Herleitung der Lösungsformel:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \qquad | \qquad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \mathbf{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}} + \frac{c}{a}\right) = 0 \qquad | \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \qquad | \qquad + \frac{b^2}{4a} - c$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \qquad | \qquad : a \ (\neq 0)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Fall 1: $b^2 - 4ac > 0$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad | \qquad \sqrt{\ldots}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|} \qquad | \qquad -\frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\mathbf{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

2 Lösungen

Fall 2: $b^2 - 4ac = 0$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \qquad | \qquad \sqrt{\ldots}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \qquad | \qquad -\frac{b}{2a}$$

$$\mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$$

1 Lösung

Fall 3: $b^2 - 4ac < 0$: Linke Seite der Gleichung > 0, rechte Seite < 0

keine Lösung

Lösungen

1. Parabel **schneidet** x-Achse — Quadratische Gleichung hat **2 Lösungen**
   Parabel **berührt** x-Achse — Quadratische Gleichung hat **1 Lösung**
   Parabel berührt oder schneidet x-Achse **nicht** — Quadratische Gleichung hat **keine Lösung**

2. *"Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion* $y = g(x) = \frac{3x^8-2x^5+x-6}{x^6-2x^4+1} - 1.$*"*

   "Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\frac{3x^8-2x^5+x-6}{x^6-2x^4+1} - 1 = 0.$*"*

3. a) siehe *Papula*
   b) siehe *Papula*

4. $a < \frac{1}{4}$ — $x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$
   $a = \frac{1}{4}$ — $x = -\frac{1}{2}$
   $a > \frac{1}{4}$ — keine Lösung

5. a) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$
   b) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$
   c) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{5}$

6. a) $P_1(6|9)$, $P_2(-2|1)$
   b) $P(2|1)$
   c) kein Schnittpunkt

7. $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{5}$

8. * a) p_1 läuft durch (0|0)
   $p_1(0) = 0$ — $c_1 = 0$
   p_1 läuft durch (-2|8)
   $p_1(-2) = 8$ — $4a_1 - 2b_1 + c_1 = 8$
   p_1 läuft durch (1|2)
   $p_1(1) = 2$ — $a_1 + b_1 + c_1 = 2$
   p_2 läuft durch (0|-3)
   $p_1(0) = -3$ — $c_2 = -3$
   p_2 läuft durch (1|2)
   $p_2(1) = 2$ — $a_2 + b_2 + c_2 = 2$
   p_1 und p_2 **berühren** sich
   $p_1(x) = p_2(x)$ hat 1 Lösung — $(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) = 0$

   b) $a_1 = 2, b_1 = 0, c_1 = 0, a_2 = -1, b_2 = 6, c_2 = -3$
   $p_1(x) = 2x^2$
   $p_2(x) = -x^2 + 6x - 3$

9. * …