Übung 3 Funktionen
Funktion als Abbildung

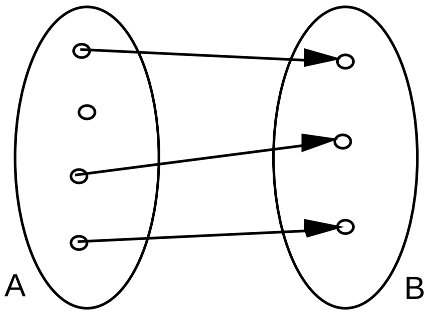
Lernziele

- verstehen, was eine Abbildung ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Abbildung ist oder nicht.
- den Bildbereich einer gegebenen Abbildung bestimmen können.
- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- den Definitionsbereich und den Wertebereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte vorgegebener Funktionen bestimmen können.

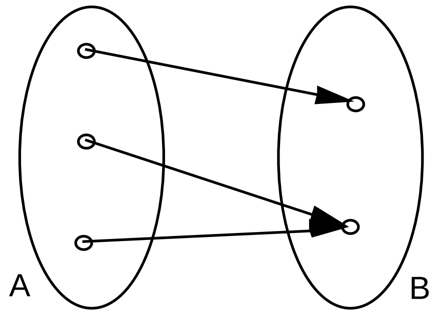
Aufgaben

1. Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Pfeildiagramme eine Abbildung $A \rightarrow B$ darstellen

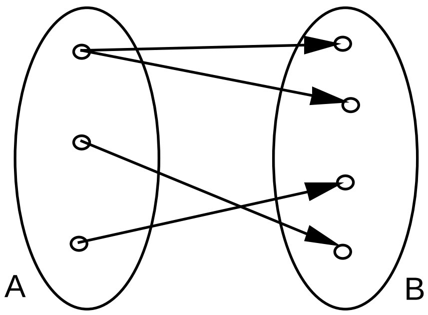
a)



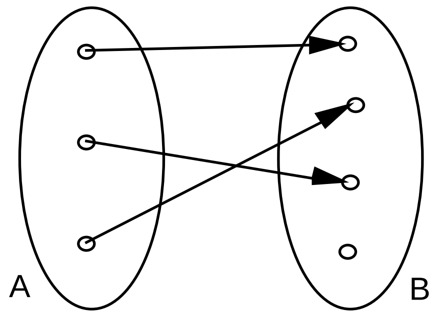
b)



c)



d)



e) A = Menge aller Häuser, B = Menge aller ArchitektInnen
f: $A \rightarrow B$, $h \rightarrow a = f(h)$ = ArchitektIn von h

f) A = Menge aller Vereine in der Schweiz, B = Menge aller SchweizerInnen
p: $A \rightarrow B$, $x \rightarrow y = p(x)$ = PräsidentIn von x

g) A = {1971, 1972, ... , 1980, 1981}
B = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
f: $A \rightarrow B$, $j \rightarrow m = f(j)$ = Mensch mit Jahrgang j

h) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
B = {1971, 1972, ... , 1980, 1981}
j: $A \rightarrow B$, $m \rightarrow j = j(m)$ = Jahrgang von Mensch m

2. Gegeben sind die Mengen A und B.
Machen Sie einen Vorschlag für eine Abbildung $A \to B$.

a) A = Menge aller Tage des Jahres 2001
B = R

b) A = Menge aller Architektur- und Ingenieurbüros in der Schweiz
B = Menge aller Schweizer Kantone

c) A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Dreiecke

3. Bestimmen Sie die Bildmenge W der folgenden Abbildungen:

a) A = {Januar, Feburar, März, ..., Dezember}
B = {A, B, C, ..., Z}
f: $A \to B$, $m \to b = f(m)$ = Anfangsbuchstabe des Monats m

b) A = Menge aller Nachbarländer der Schweiz
B = Menge aller europäischen Städte
h: $A \to B$, $n \to s = h(n)$ = Hauptstadt des Nachbarlandes n

c) A = Menge aller Drei- und Vierecke
B = {180°, 360°}
i: $A \to B$, $f \to w = i(f)$ = Innenwinkelsumme der Figur f

4. Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion ist:

a) f: $R \to R$, $x \to y = f(x) = x^2$
b) f: $R^+ \to R$, $x \to y = f(x)$ = Zahl, welche quadriert gleich x ergibt
c) f: $R \to R$, $x \to y = f(x) = \sqrt{x}$
d) f: $R_0^+ \to R$, $x \to y = f(x) = \sqrt{x}$
e) f: $N \to N$, $x \to y = f(x)$ = Teiler von x

5. Gegeben sind die Mengen A und B.
Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion $A \to B$.

a) A = {-3, 1, 4, 7, 11, 14}
B = {-6, 2, 8, 14, 22, 28}

b) $A = R^-$
$B = R^+$

6. Bestimmen Sie die Bildmenge W der folgenden Funktionen f:

a) f aus Aufgabe 4a)

b) f aus Aufgabe 4d)

7. Bestimmen Sie den grösstmöglichen reellen Definitionsbereich A für die Funktion f: $A \to B$, $x \to f(x)$

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

8. Gegeben ist die Funktion f: $R \to R$, $x \to f(x)$

a) $f(x) = x^3-x$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie jeweils die folgenden Funktionswerte:

i) f(0) ii) f(1) iii) f(-1)
iv) f(a) v) f(x+a) vi) f(3-f(-3))

Lösungen

1.
a) Zuordnung nicht definiert für alle a A — keine Abbildung
b) Zuordnung eindeutig definiert für alle a A — Abbildung
c) Zuordnung nicht eindeutig — keine Abbildung
d) Zuordnung eindeutig definiert für alle a A — Abbildung
e) f nicht definiert für alle h A — keine Abbildung
f) p nicht definiert für alle x A — keine Abbildung
g) f nicht eindeutig — keine Abbildung
h) j eindeutig definiert für alle m A — Abbildung

2.
a) m: $A \to B$, $d \to T = m(d)$ = Maximaltemperatur in Chur am Tage d
b) s: $A \to B$, $b \to k = s(b)$ = Kanton, an welchen b die meisten Steuern zahlen muss
c) f: $A \to B$, $v \to d = f(v)$ = gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie v

3.
a) W = {A, D, F, J, M, N, O, S}
b) W = {Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}
c) W = B

4.
a) f eindeutig definiert für alle x R — Funktion
b) f nicht eindeutig — keine Funktion
c) f nicht definiert für alle x R — keine Funktion
d) f eindeutig definiert für alle x R — Funktion
e) f nicht eindeutig — keine Funktion

5.
a) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = 2x$
b) f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = -x$

6.
a) $W = R_0^+$
b) $W = R_0^+$

7.
a) $A = R_0^+$ b) $A = \{x\ \ R \mid x \geq 2\}$
c) $A = \{x\ \ R \mid |x| \geq 1\}$ d) $A = R \setminus \{-2,2\}$

8.
a)
i) $f(0) = 0^3 - 0 = 0$ ii) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
iii) $f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$ iv) $f(a) = a^3 - a$
v) $f(x+a) = (x+a)^3 - (x+a)$
vi) $f\big(3-f(-3)\big) = f\big(3-\big((-3)^3-(-3)\big)\big) = f\big(3-(-24)\big) = f(27) = 27^3-27 = 19'656$

b)
i) $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$ ii) $f(1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$
iii) $f(-1) = \frac{(-1)^2}{-1+1}$ nicht definiert iv) $f(a) = \frac{a^2}{a+1}$
v) $f(x+a) = \frac{(x+a)^2}{x+a+1}$
vi) $f\big(3-f(-3)\big) = f\left(3 - \frac{(-3)^2}{-3+1}\right) = f\left(3 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right) = f\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2}{\frac{15}{2} + 1} = \frac{225}{34}$