Gleichungen

Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein **Gleichheitszeichen** verknüpft sind. Dadurch entsteht eine **Aussage**, die entweder wahr oder falsch ist.

Bsp.: $7x - 3 = 12x - 38$
Diese Gleichung ist erfüllt, d.h. die entsprechende Aussage ist wahr, falls $x = 7$.
Diese Gleichung ist nicht erfüllt, d.h. die entsprechende Aussage ist falsch, falls $x \neq 7$.

Man unterscheidet zwischen **Identitäten** (identischen Gleichungen) und **Bestimmungsgleichungen**.

Identitäten

Identitäten sind Gleichungen, die allgemeine Wahrheiten enthalten. Identitäten sind immer erfüllt, d.h. die ensprechende Aussage ist immer wahr.

Bsp.: $4 + 5 = 9$

Bsp.: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Diese Gleichung ist für jeden beliebigen Wert von a, m, n erfüllt.

Bsp.: $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
Diese Gleichung ist für jeden beliebigen Wert von x erfüllt.

Bestimmungsgleichungen

Bestimmungsgleichungen sind Gleichungen, die nur für bestimmte Werte einer oder mehrerer **Unbekannten** x, y, … erfüllt sind. Diese bestimmten Werte heissen **Lösungen** der Gleichung.

Bsp.: $2x + 4 = 10$
Diese Gleichung hat genau eine Lösung: $x = 3$

Bsp.: $y^2 - 1 = 3$
Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $y_1 = 2$
$y_2 = -2$

Bsp.: $\sqrt{x-1} + y = 2$
Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen: $(x,y)_1 = (2,1)$
$(x,y)_2 = (5,0)$
$(x,y)_3 = (10,-1)$
usw.

Die Menge aller Lösungen einer Bestimmungsgleichung ist die **Lösungsmenge** L.

Bsp.: $2x + 4 = 10$ $L = \{ 3 \}$

Bsp.: $y^2 - 1 = 3$ $L = \{ 2 , -2 \}$
Bsp.: $\sqrt{x-1} + y = 2$ $L = \{ (2,1) , (5,0) , (10,-1) , ... \}$

Zwei Bestimmungsgleichungen mit derselben Lösungsmenge sind **äquivalent**.

Bsp.: $2x + 4 = 10$
$x + 1 = 4$
Diese beiden Gleichungen haben die gleiche Lösung bzw. die gleiche Lösungsmenge $L = \{ 3 \}$.
Sie sind daher äquivalent.

Lösen einer Bestimmungsgleichung

Man löst eine Bestimmungsgleichung, indem man sie durch eine oder mehrere **Äquivalenzumformungen** in die Form "Unbekannte = ..." bringt.

Bsp.:	$2x + 4 = 10$	$\mid -4$
	$2x = 6$	$\mid : 2$
	$x = 3$	

Bsp.:	$(x+2)(x-3) - 3(2x-3) = (x-6)^2 + 2$	| ausmultiplizieren
	$(x^2 - x - 6) - (6x - 9) = (x^2 - 12x + 36) + 2$	| Klammern auflösen
	$x^2 - x - 6 - 6x + 9 = x^2 - 12x + 36 + 2$	| zusammenfassen
	$x^2 - 7x + 3 = x^2 - 12x + 38$	$\mid - x^2$
	$- 7x + 3 = - 12x + 38$	$\mid + 12x$
	$5x + 3 = 38$	$\mid - 3$
	$5x = 35$	$\mid : 5$
	$x = 7$	

Äquivalenzumformungen

Die folgenden Umformungen führen eine Gleichung in eine neue, äquivalente Gleichung über. Die neue Gleichung hat also die gleiche(n) Lösung(en) bzw. die gleiche Lösungsmenge wie die alte Gleichung.

- **Addition** einer **beliebigen Zahl** auf beiden Seiten der Gleichung
- **Subtraktion** einer **beliebigen Zahl** auf beiden Seiten der Gleichung
- **Multiplikation** beider Seiten der Gleichung mit einer **beliebigen Zahl ≠ 0**
- **Division** beider Seiten der Gleichung mit einer **beliebigen Zahl ≠ 0**
- …