Aufgaben 11 — Funktionen mehrerer Variablen
Partielle Ableitungen, Gradient, Hesse-Matrix

Lernziele

- alle partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Funktion mehrerer Variablen bestimmen können.
- den Gradienten einer Funktion mehrerer Variablen bestimmen können.
- alle partiellen Ableitungen höherer Ordnung einer Funktion mehrerer Variablen bestimmen können.
- die Hesse-Matrix einer Funktion mehrerer Variablen bestimmen können.
- den Satz von Steiner bei der Bestimmung von partiellen Ableitungen höherer Ordnung einer Funktion mehrerer Variablen anwenden können.

Aufgaben

11.1 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
1, 2, 3, 4, 5, 6 (Seiten 332 und 333, „Zu Abschnitt 2")

11.2 Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y,z) = 2x^3y^4z^5 - 6y^{-7}e^{-8z} \sin(9x)$

b) $T(x,y,z,t) = (2x^2 - 3x + 1)(y^2 + 1)\, e^{-2z}\, e^{-10t}$

11.3 Bestimmen Sie von den nachfolgenden Funktionen …

i) … den Gradienten.

ii) … die Hesse-Matrix.

a) $f(x,y) = 3x + 5y$ — b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$

c) $f(x,y) = e^{3x-5y}$ — d) $V(r,h) = r^2\pi h$

e) $\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$ — f) $f(x,y,z) = 2x^2\, e^{-3yz}$

g) $p(x,y,h) = \rho g h$ — h) * $T(x,y,z,t) = a(b - x^2 - y^2)\, e^{-2z} \sin(\omega t)$

11.4 Führen Sie in Moodle den Test 11 durch.

Lehrbuch Papula 2

III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

2 Partielle Differentiation

2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung (Seiten 213 bis 222)

2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung (Seiten 222 bis 227)

Lösungen

11.1 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seiten 724 bis 726)

11.2 a)

$f_x(x,y,z) = 6x^2y^4z^5 - 54y^{-7}e^{-8z}\cos(9x)$

$f_y(x,y,z) = 8x^3y^3z^5 + 42y^{-8}e^{-8z}\sin(9x)$

$f_z(x,y,z) = 10x^3y^4z^4 + 48y^{-7}e^{-8z}\sin(9x)$

b)

$T_x(x,y,z,t) = (4x - 3)(y^2 + 1)\, e^{-2z}\, e^{-10t}$

$T_y(x,y,z,t) = 2\,(2x^2 - 3x + 1)\, y\, e^{-2z}\, e^{-10t}$

$T_z(x,y,z,t) = -2\,(2x^2 - 3x + 1)(y^2 + 1)\, e^{-2z}\, e^{-10t}$

$T_t(x,y,z,t) = -10\,(2x^2 - 3x + 1)(y^2 + 1)\, e^{-2z}\, e^{-10t}$

11.3 a)

i) $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{\nabla}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

i) $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 6y \end{pmatrix}$

ii) $\vec{\nabla}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

c)

i) $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\, e^{3x-5y} \\ -5\, e^{3x-5y} \end{pmatrix}$

ii) $\vec{\nabla}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\, e^{3x-5y} & -15\, e^{3x-5y} \\ -15\, e^{3x-5y} & 25\, e^{3x-5y} \end{pmatrix}$

d)

i) $\vec{\nabla} V(r,h) = \begin{pmatrix} V_r(r,h) \\ V_h(r,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\pi h \\ r^2\pi \end{pmatrix}$

ii) $\vec{\nabla}^2 V(r,h) = \begin{pmatrix} V_{rr}(r,h) & V_{rh}(r,h) \\ V_{hr}(r,h) & V_{hh}(r,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi h & 2r\pi \\ 2r\pi & 0 \end{pmatrix}$

e)

i) $\vec{\nabla} \psi(x,t) = \begin{pmatrix} \psi_x(x,t) \\ \psi_t(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA\cos(kx - \omega t) \\ -\omega A\cos(kx - \omega t) \end{pmatrix}$

ii) $\vec{\nabla}^2 \psi(x,t) = \begin{pmatrix} \psi_{xx}(x,t) & \psi_{xt}(x,t) \\ \psi_{tx}(x,t) & \psi_{tt}(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2A\sin(kx - \omega t) & k\omega A\sin(kx - \omega t) \\ k\omega A\sin(kx - \omega t) & -\omega^2A\sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$

f) (siehe nächste Seite)

f) i) $$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x\, e^{-3yz} \\ -6x^2 z\, e^{-3yz} \\ -6x^2 y\, e^{-3yz} \end{pmatrix}$$

ii) $$\vec{\nabla}^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{-3yz} & -12xz\, e^{-3yz} & -12xy\, e^{-3yz} \\ -12xz\, e^{-3yz} & 18x^2z^2\, e^{-3yz} & -6x^2(1-3yz)\, e^{-3yz} \\ -12xy\, e^{-3yz} & -6x^2(1-3yz)\, e^{-3yz} & 18x^2y^2\, e^{-3yz} \end{pmatrix}$$

g) i) $$\vec{\nabla} p(x,y,h) = \begin{pmatrix} p_x(x,y,h) \\ p_y(x,y,h) \\ p_h(x,y,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix}$$

ii) $$\vec{\nabla}^2 p(x,y,h) = \begin{pmatrix} p_{xx}(x,y,h) & p_{xy}(x,y,h) & p_{xh}(x,y,h) \\ p_{yx}(x,y,h) & p_{yy}(x,y,h) & p_{yh}(x,y,h) \\ p_{hx}(x,y,h) & p_{hy}(x,y,h) & p_{hh}(x,y,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h) * i) $$\vec{\nabla} T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} T_x(x,y,z,t) \\ T_y(x,y,z,t) \\ T_z(x,y,z,t) \\ T_t(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ax\, e^{-2z} \sin(\omega t) \\ -2ay\, e^{-2z} \sin(\omega t) \\ -2a(b-x^2-y^2)\, e^{-2z} \sin(\omega t) \\ \omega a(b-x^2-y^2)\, e^{-2z} \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

ii) $$\vec{\nabla}^2 T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} T_{xx}(x,y,z,t) & T_{xy}(x,y,z,t) & T_{xz}(x,y,z,t) & T_{xt}(x,y,z,t) \\ T_{yx}(x,y,z,t) & T_{yy}(x,y,z,t) & T_{yz}(x,y,z,t) & T_{yt}(x,y,z,t) \\ T_{zx}(x,y,z,t) & T_{zy}(x,y,z,t) & T_{zz}(x,y,z,t) & T_{zt}(x,y,z,t) \\ T_{tx}(x,y,z,t) & T_{ty}(x,y,z,t) & T_{tz}(x,y,z,t) & T_{tt}(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2ae^{-2z}\sin(\omega t) & 0 & 4ax\, e^{-2z}\sin(\omega t) & -2\omega ax\, e^{-2z}\cos(\omega t) \\ 0 & -2a\, e^{-2z}\sin(\omega t) & 4ay\, e^{-2z}\sin(\omega t) & -2\omega ay\, e^{-2z}\cos(\omega t) \\ 4ax\, e^{-2z}\sin(\omega t) & 4ay\, e^{-2z}\sin(\omega t) & 4a(b - x^2 - y^2)\, e^{-2z}\sin(\omega t) & -2\omega a(b - x^2 - y^2)\, e^{-2z}\cos(\omega t) \\ -2\omega ax\, e^{-2z}\cos(\omega t) & -2\omega ay\, e^{-2z}\cos(\omega t) & -2\omega a(b - x^2 - y^2)\, e^{-2z}\cos(\omega t) & -\omega^2 a(b - x^2 - y^2)\, e^{-2z}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

11.4 -