

## Aufgaben 10 Funktionen mehrerer Variablen Definitionsbereich, Graf, Niveaulinien/-flächen

### Lernziele

- den grösstmöglichen Definitionsbereich einer Funktion mehrerer Variablen bestimmen und skizzieren können.
- die Höhen- bzw. Niveaulinien einer einfacheren Funktion von zwei Variablen bestimmen und skizzieren können.
- die Höhen- bzw. Niveaulinien einer einfacheren Funktion von drei Variablen bestimmen und skizzieren können.
- den Grafen und die Höhen- bzw. Niveaulinien einer Funktion von zwei Variablen mit Python/Numpy plotten können.

### Aufgaben

10.1 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:  
1, 3 (Seite 332, „Zu Abschnitt 1“)

10.2 Bestimmen und beschreiben Sie die Niveaulinien der folgenden Funktionen:

a)  $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$

b)  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

c)  $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

10.3 Visualisieren Sie (Graf-, Farb- und Niveaulinien-Plot) mit Hilfe des folgenden Python/Numpy-Codes die untenstehenden Funktionen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto z = f(x,y)$ :

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as plt;
from mpl_toolkits import mplot3d;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=...; x_E=...; y_0=...; y_E=...;
N_x=...; N_y=...; N_g=...; N_l=...;
az=...; el=...; cm='viridis'; fig=...;
# Funktionen:
def f(x,y): z=...; return z;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x);
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y);
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data);
z_grid=f(x_grid,y_grid);
# Graph-Plot:
fh=plt.figure(fig); ax=plt.axes(projection='3d');
ax.plot_surface(x_grid,y_grid,z_grid,rstride=N_g,cstride=N_g,cmap=cm);
ax.view_init(el,az);
ax.set_xlabel(r'$x$'); ax.set_ylabel(r'$y$'); ax.set_zlabel(r'$z$');
ax.set_box_aspect((np.ptp(x_grid),np.ptp(y_grid),np.ptp(z_grid)));
# Farb-Plot:
fig=fig+1; fh=plt.figure(fig);
plt.pcolor(x_grid,y_grid,z_grid,cmap=cm,shading='auto');
plt.xlabel(r'$x$'); plt.ylabel(r'$y$');
plt.grid(visible=False); plt.axis('image');
# Level-Linien-Plot:
fig=fig+1; fh=plt.figure(fig);
plt.contour(x_grid,y_grid,z_grid,N_l,cmap=cm);
plt.xlabel(r'$x$'); plt.ylabel(r'$y$');
plt.grid(visible=True); plt.axis('image');
```

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

a)  $f(x,y) = \frac{x}{2}$

b)  $f(x,y) = \frac{y}{2}$

c)  $f(x,y) = \frac{x+y}{2}$

d)  $f(x,y) = \frac{xy}{4}$

e)  $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$

f)  $f(x,y) = \frac{6 \sin(xy)}{1+x^2+y^2}$

10.4 Führen Sie in Moodle den [Test 10](#) durch.

## Lehrbuch Papula 2

### III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

#### 1 Funktionen von mehreren Variablen

1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen (Seiten 194 bis 197)

1.2 Darstellungsformen einer Funktion

1.2.1 Analytische Darstellung (Seiten 197 und 198)

1.2.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle (Funktionstafel) (Seiten 198 und 199)

1.2.3 Grafische Darstellung

1.2.3.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum (Seiten 200 bis 204)

1.2.3.2 Schnittkurvendiagramme (Seiten 204 bis 209)

## Lösungen

10.1 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seiten 723 und 724)

10.2 a)  $x + 2y + 3z - c = 0$   
Ebene mit Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b)  $x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{c})^2$   
Kugeloberfläche  
- Mittelpunkt  $M(0|0|0)$   
- Radius  $r = \sqrt{c}$

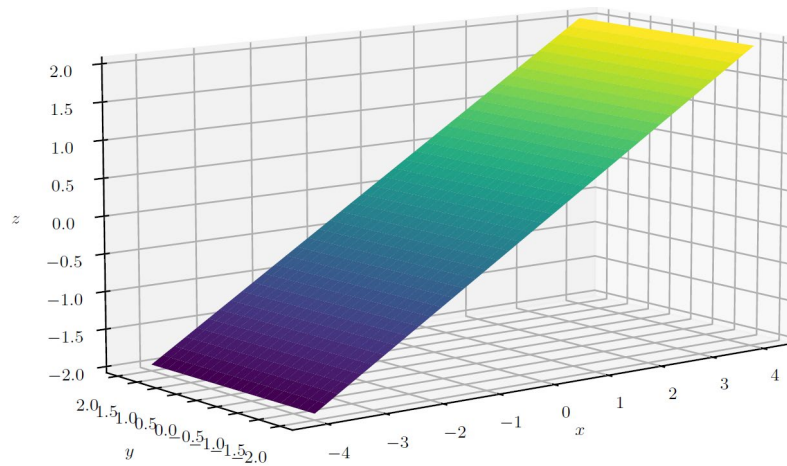
c)  $x^2 + y^2 = (\sqrt{c})^2$   
Kreiszyindermantelfläche  
- Achse = z-Koordinatenachse  
- Radius  $r = \sqrt{c}$

10.3 (siehe nächste Seite)

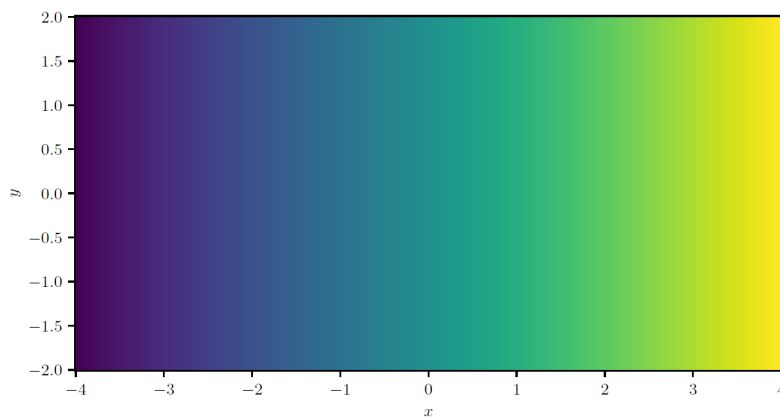
10.3 a) Code

```
# Parameter:  
x_0=-4; x_E=4; y_0=-2; y_E=2;  
N_x=401; N_y=201; N_g=10; N_l=31;  
az=-38-90; el=10; cm='viridis'; fig=1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=0.5*x; return z;
```

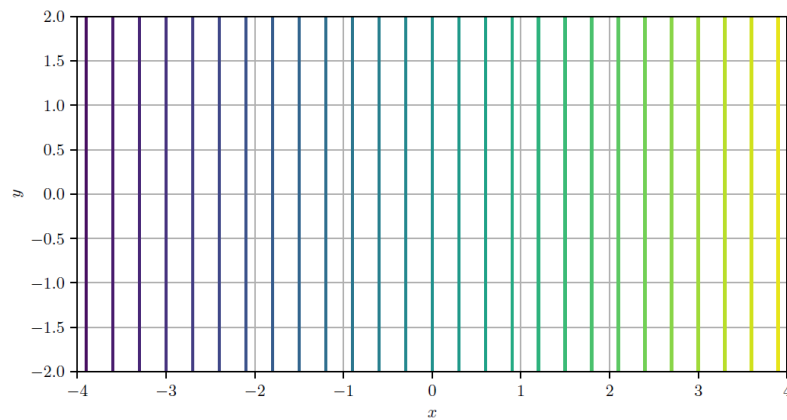
Graf-Plot



Farb-Plot



Niveaulinien-Plot

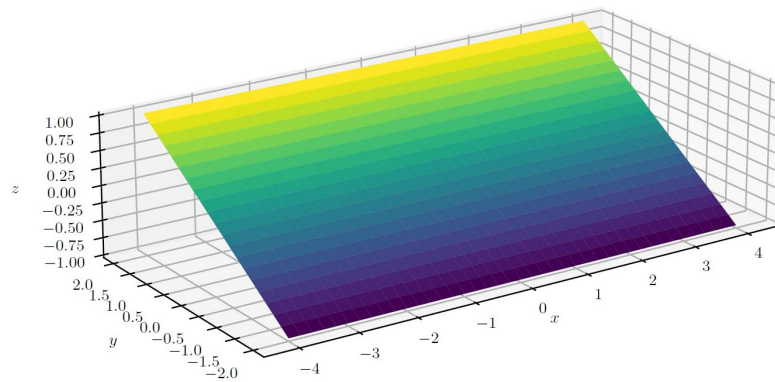


b) (siehe nächste Seite)

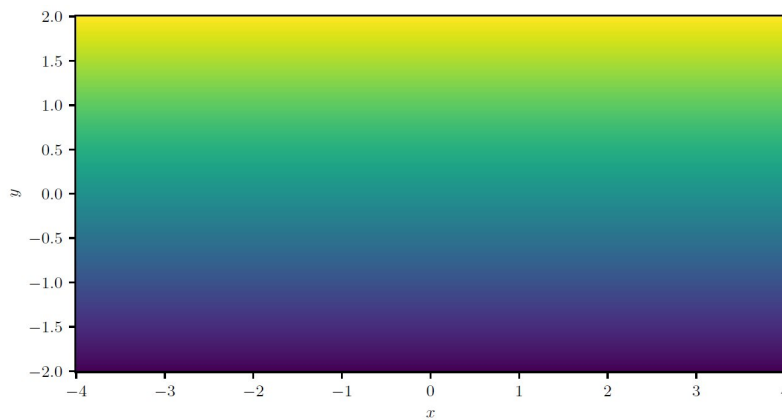
b) Code

```
# Parameter:  
x_0=-4; x_E=4; y_0=-2; y_E=2;  
N_x=401; N_y=201; N_g=10; N_l=31;  
az=-34-90; el=20; cm='viridis'; fig=fig+1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=0.5*y; return z;
```

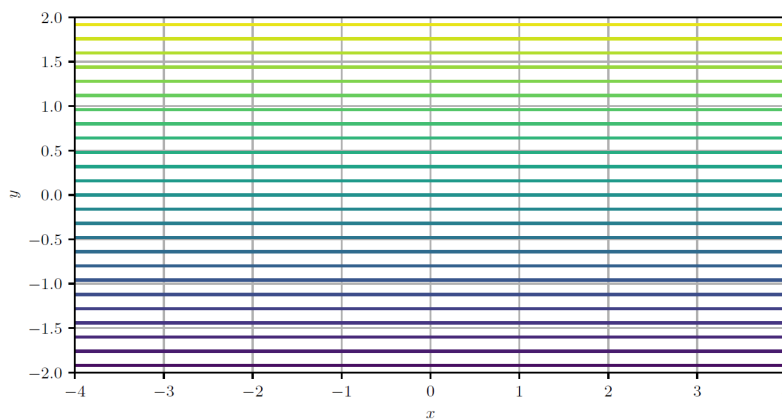
Graf-Plot



Farb-Plot



Niveaulinien-Plot

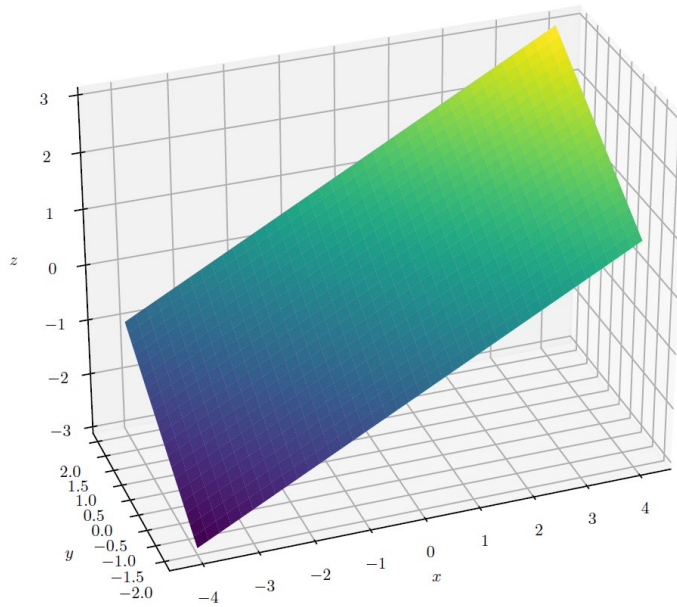


c) (siehe nächste Seite)

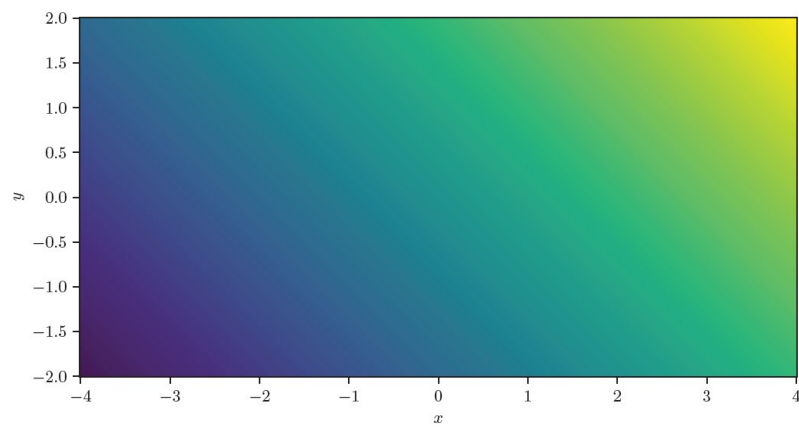
c) Code

```
# Parameter:  
x_0=-4; x_E=4; y_0=-2; y_E=2;  
N_x=401; N_y=201; N_g=10; N_l=21;  
az=-20-90; el=30; cm='viridis'; fig=fig+1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=0.5*(x+y); return z;
```

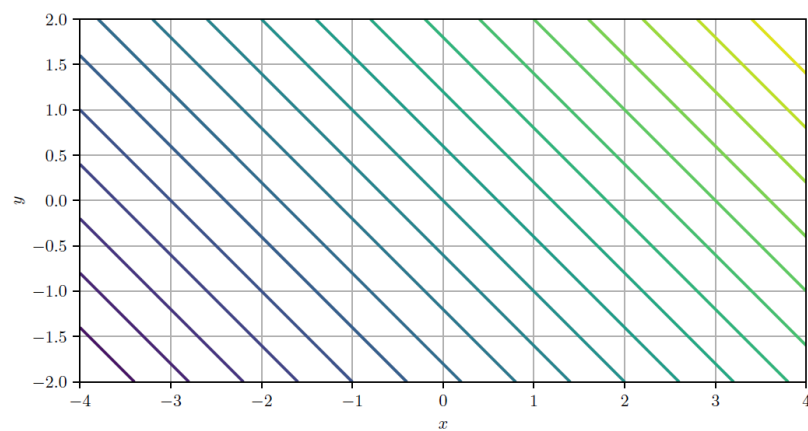
Graf-Plot



Farb-Plot



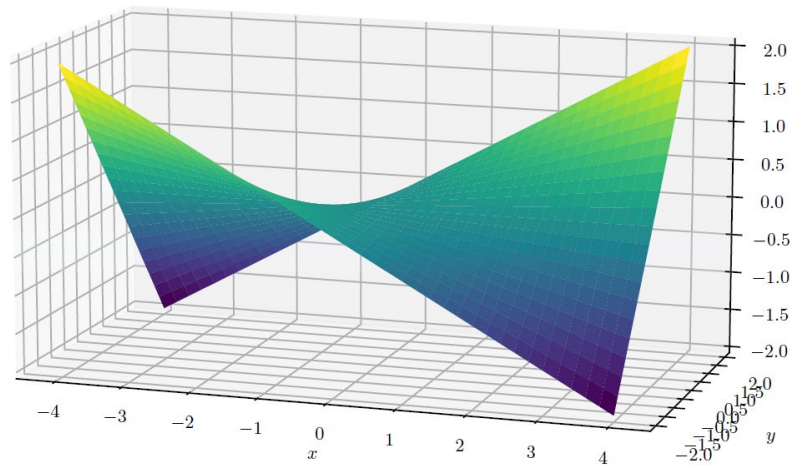
Niveaulinien-Plot



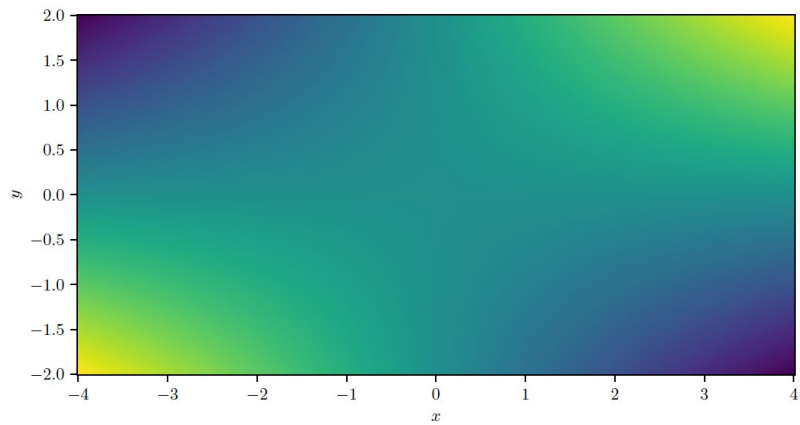
d) Code

```
# Parameter:  
x_0=-4; x_E=4; y_0=-2; y_E=2;  
N_x=401; N_y=201; N_g=10; N_l=21;  
az=18-90; el=12; cm='viridis'; fig=fig+1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=0.25*x*y; return z;
```

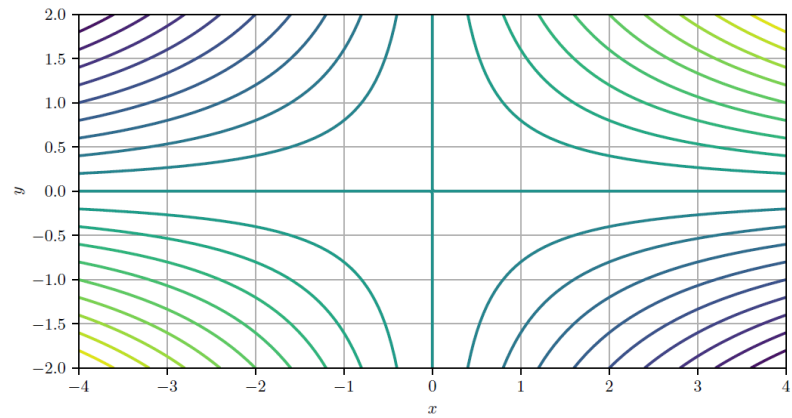
Graf-Plot



Farb-Plot



Niveaulinien-Plot

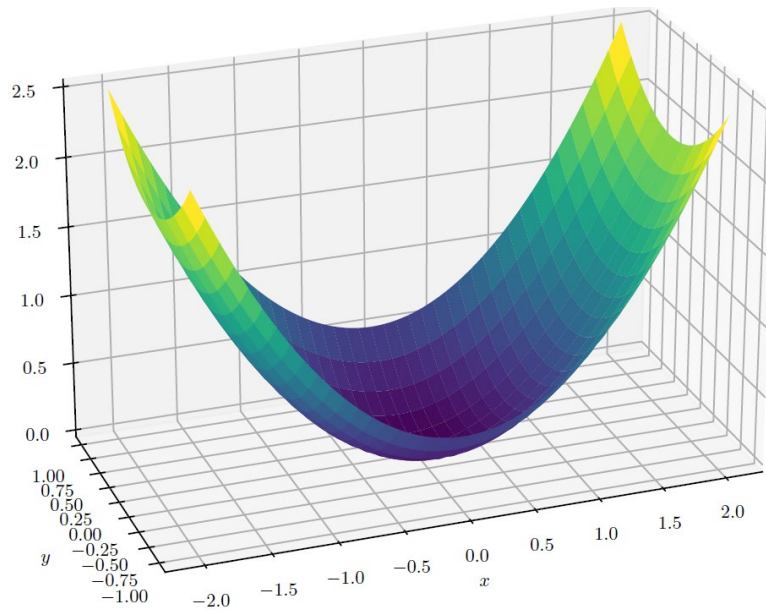


e) (siehe nächste Seite)

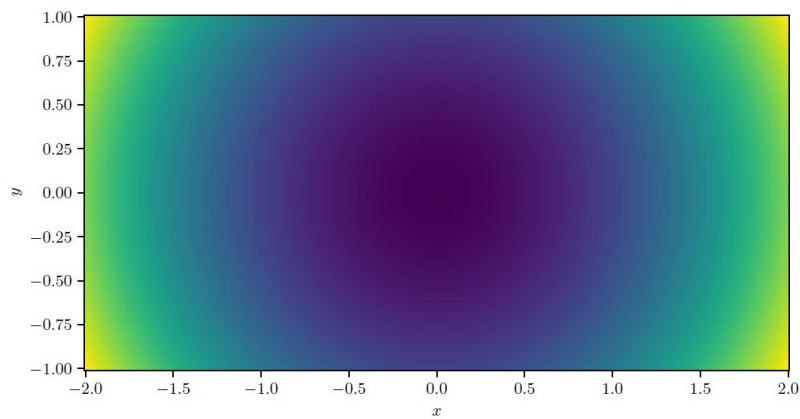
e) Code

```
# Parameter:  
x_0=-2; x_E=2; y_0=-1; y_E=1;  
N_x=401; N_y=101; N_g=10; N_l=21;  
az=-20-90; el=24; cm='viridis'; fig=fig+1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=0.5*(x**2+y**2); return z;
```

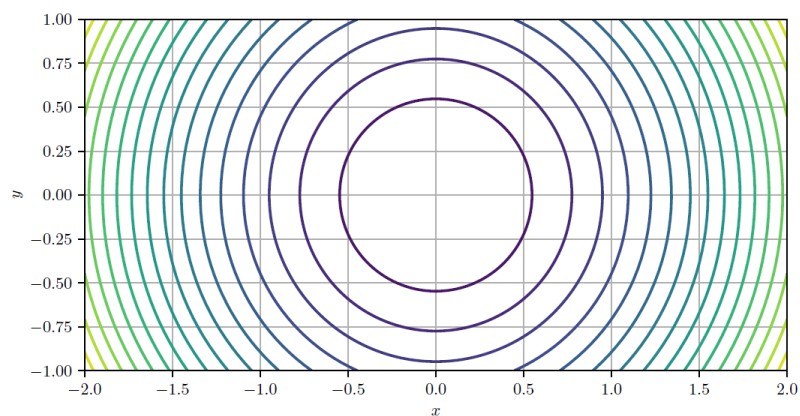
Graf-Plot



Farb-Plot



Niveaulinien-Plot

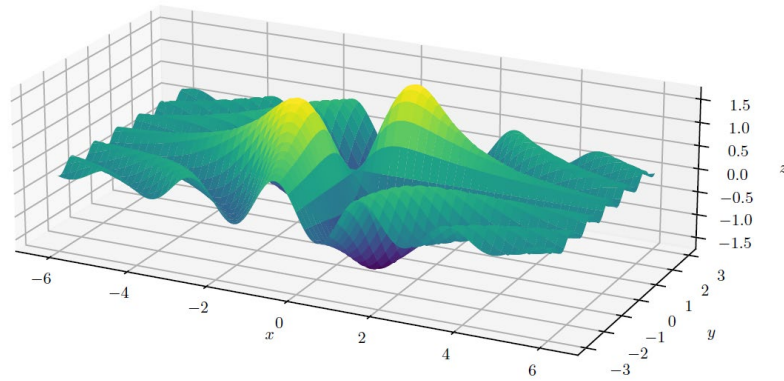




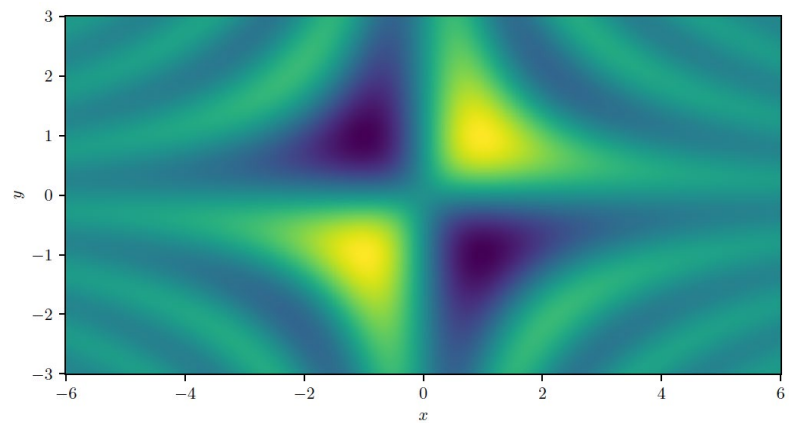
f) Code

```
# Parameter:  
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3;  
N_x=601; N_y=301; N_g=10; N_l=21;  
az=26-90; el=20; cm='viridis'; fig=fig+1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=6*np.sin(x*y)/(1+x**2+y**2); return z;
```

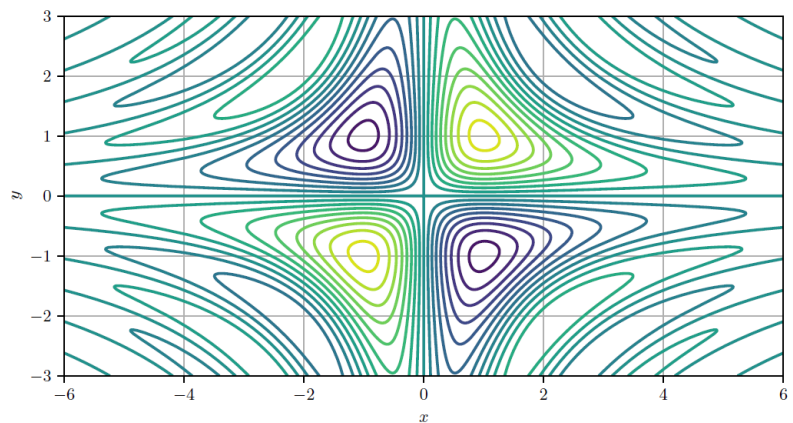
Graf-Plot



Farb-Plot



Niveaulinien-Plot



10.4 -