Aufgaben 1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung Grundbegriffe

Lernziele

- wissen und verstehen, was eine gewöhnliche Differentialgleichung ist.
- Anwendungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Physik kennen.
- wissen und verstehen, was eine explizite und eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung ist.
- nachprüfen können, ob eine gegebene Funktion eine Lösung einer gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichung ist.
- wissen und verstehen, was eine elementar integrierbare gewöhnliche Differentialgleichung ist.
- die allgemeine Lösung einer elementar integrierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen können.
- wissen und verstehen, was ein Anfangswert- und ein Randwertproblem ist.
- ein Anfangs- oder Randwertproblem mit einer elementar intergrierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung analytisch lösen können.

Aufgaben

1.1

Prüfen Sie nach, dass die gegebenen *Funktionen* jeweils eine *Lösung* der gegebenen ODE 1. Grades sind.

a) ODE: $y' = 0$

$y_1(x) = 0; \quad y_2(x) = -7$

b) ODE: $y' = y$

$y_1(x) = \mathrm{e}^x; \quad y_2(x) = 3\,\mathrm{e}^x$

c) ODE: $y' = 2y$

$y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}; \quad y_2(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x}$

d) ODE: $y' = 1 + y^2$

$y_1(x) = \tan(x); \quad y_2(x) = \tan(x+1)$

e) ODE: $y'y = 1$

$y_1(x) = \sqrt{2x}; \quad y_2(x) = \sqrt{2x-3}$

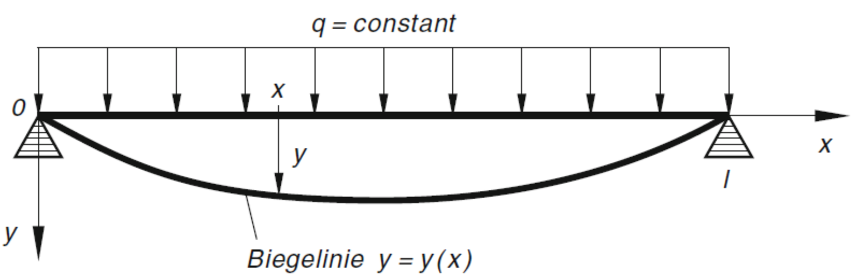
f) ODE: $\left(1+y^2\right) + \left(1+x^2\right)\cdot y' = 0$

$y(x) = \dfrac{k-x}{1+kx}$

Bem.:
- «ODE» bedeutet «**O**rdinary **D**ifferential **E**quation» (deutsch: Gewöhnliche Differentialgleichung).

1.2 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
1, 2, 4 (Seiten 522 und 523, „Zu Abschnitt 1“)

1.3 Betrachten Sie die Biegelinie y = y(x) eines an beiden Enden aufliegenden, gleichmässig belasteten Balkens:



Die Biegelinie y(x) erfüllt das folgende Randwertproblem RWP:

$$y'' = -\frac{q}{2EI}\left(lx - x^2\right), \qquad y(0) = y(l) = 0 \qquad (0 \le x \le l)$$

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Lösen Sie das RWP. Bestimmen Sie also diejenige spezielle/partikuläre Lösung y(x) der GDGL, welche auch die RB erfüllt.

Hinweis:
- Die GDGL ist elementar integrierbar.

1.4

Überprüfen Sie jeweils die angegebene Lösung der DGL:

(a) $y'(x) = 6\,x^2 - 5$ hat die partikuläre Lösung $y(x) = 2\,x^3 - 5\,x - 8$.

(b) $y'' - 25\,y = 0$ hat die allgemeine Lösung $y = C_1 \cdot e^{5x} + C_2 \cdot e^{-5x}$.

(c) $y^4\,e^{2x} + \dfrac{dy}{dx} = 0$ hat die allgemeine Lösung $y = \left(\dfrac{2}{3\,e^{2x} - K}\right)^{1/3}$.

(d) (fehlt)

(e) $L\,\dfrac{di}{dt} + R\,i = u_0$ hat die partikuläre Lösung $i(t) = \dfrac{u_0}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]$.

(f) $x^{(3)}(t) - 2\,\ddot{x} - 5\,\dot{x} + 6\,x = 0$ hat die allg. Lösung $x(t) = A \cdot e^{t} + B \cdot e^{-2t} + C \cdot e^{3t}$.

1.5 Führen Sie in Moodle den Test 1 durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Grundbegriffe

1.1 Ein einführendes Beispiel (Seiten 343 und 344)
1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung (Seite 345)
1.3 Lösung einer Differentialgleichung (Seiten 345 bis 348)
1.5 Anfangswert- und Randwertprobleme (Seiten 351 bis 354)

Lösungen

1.1

a) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 0; \quad y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = -7.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x) = 0}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) = 0.}}$$

b) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = y; \quad y_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad y_2(x) = 3\,\mathrm{e}^x.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x)}} = \mathrm{e}^x = \underline{\underline{y_1(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x)}} = 3\,\mathrm{e}^x = \underline{\underline{y_2(x).}}$$

c) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 2y; \quad y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad y_2(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x)}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} = \underline{\underline{2 \cdot y_1(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x)}} = 4 \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} = \underline{\underline{2 \cdot y_2(x).}}$$

d) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 1 + y^2; \quad y_1(x) = \tan(x), \quad y_2(x) = \tan(x+1).$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x)}} = 1 + \tan^2(x) = \underline{\underline{1 + y_1^2(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x)}} = 1 + \tan^2(x+1) = \underline{\underline{1 + y_2^2(x).}}$$

e) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y'y = 1; \quad y_1(x) = \sqrt{2x}, \quad y_2(x) = \sqrt{2x-3}.$$

Es gilt

$$y_1'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{und} \quad y_2'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

und somit

$$\underline{\underline{y_1'(x) \cdot y_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{2x} = \underline{\underline{1}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) \cdot y_2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \cdot \sqrt{2x-3} = \underline{\underline{1.}}$$

f) Wir betrachten eine ODE und eine *Funktion*, nämlich

$$\left(1 + y^2\right) + \left(1 + x^2\right) \cdot y' = 0; \quad y(x) = \frac{k - x}{1 + kx}.$$

Durch *Ableiten* mit Hilfe der *Quotienten-Regel* finden wir

$$y'(x) = \frac{(0-1) \cdot (1+kx) - (k-x) \cdot (0+k)}{(1+kx)^2} = \frac{-1 - kx - k^2 + xk}{(1+kx)^2} = -\frac{1+k^2}{(1+kx)^2}$$

Somit gilt

$$D = \underline{\underline{\left(1+y^2(x)\right)+\left(1+x^2\right)\cdot y'(x)}} = 1+\left(\frac{k-x}{1+kx}\right)^2+\left(1+x^2\right)\cdot\left(-\frac{1+k^2}{(1+kx)^2}\right)$$

$$= \frac{(1+kx)^2}{(1+kx)^2}+\frac{(k-x)^2}{(1+kx)^2}-\frac{\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+k^2\right)}{(1+kx)^2}$$

$$= \frac{(1+kx)^2+(k-x)^2-\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+k^2\right)}{(1+kx)^2}$$

$$= \frac{1+2kx+k^2x^2+k^2-2kx+x^2-\left(1+x^2+k^2+x^2k^2\right)}{(1+kx)^2}$$

$$= \frac{1+k^2x^2+k^2+x^2-1-x^2-k^2-x^2k^2}{(1+kx)^2} = \frac{0}{(1+kx)^2} = \underline{\underline{0.}}$$

1.2 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seite 746, «Abschnitt 1»)

1.3 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seite 354)

1.4

Selbstkontrolle: Alle angegebenen Lösungen stimmen beim Einsetzen, und die Anzahl Parameter bei einer allgemeinen Lösung stimmt jeweils mit der Ordnung der DGL überein.

1.5 -