

Unbestimmtes Integral

Bsp.: Finanzmathematik

Gegeben ist die Grenzkostenfunktion K' für die Produktion einer Ware oder die Erbringung einer Dienstleistung:

$$K'(x) = (3x + 50) \text{ CHF}$$

Wie lautet die Gesamtkostenfunktion K ?

$$K(x) = \dots ?$$

Allgemeine Problemstellung

Gegeben ist eine Funktion f . Welche Funktion F ist so, dass $F' = f$?

Bsp.: 1. $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & F_1(x) = x^2 && \text{da } F_1'(x) = 2x = f(x) \\ & F_2(x) = x^2 + 1 && \text{da } F_2'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \\ & F_3(x) = x^2 - 4 && \text{da } F_3'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \\ & \dots && \\ & F(x) = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}) && \text{da } F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \end{aligned}$$

Dies sind alle Funktionen F mit $F' = f$. Es gibt keine weiteren Funktionen F mit anderen Gleichungen als $F(x) = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$.

2. $f(x) = 8x^3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & F_1(x) = 2x^4 && \text{da } F_1'(x) = 8x^3 = f(x) \\ & F_2(x) = 2x^4 + 5 && \text{da } F_2'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \\ & F_3(x) = 2x^4 - 11 && \text{da } F_3'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \\ & \dots && \\ & F(x) = 2x^4 + C \quad (C \in \mathbb{R}) && \text{da } F'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \end{aligned}$$

Definitionen

F heisst **Stammfunktion** von f , falls ihre Ableitung F' gleich f ist, d.h. $F'(x) = f(x)$.

Die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f heisst **unbestimmtes Integral** von f , bezeichnet mit $\int f(x) \, dx$.

Bsp.: 1. $f(x) = 8x^3$

Alle Stammfunktionen F haben die Form $F(x) = 2x^4 + C \quad (C \in \mathbb{R})$.
Wir schreiben daher $\int 8x^3 \, dx = \int 8x^3 \, dx = 2x^4 + C$

$$\begin{aligned} 2. \quad & f(x) = 12x^2 \\ & \int f(x) \, dx = \int 12x^2 \, dx = 4x^3 + C \end{aligned}$$

$$3. \quad \int 2x \, dx = x^2 + C$$

$$4. \quad \int 3 e^{3x} \, dx = e^{3x} + C$$

$C \quad (C \in \mathbb{R})$ heisst **Integrationskonstante**.