

Repetitions-Aufgaben 2

Differentialrechnung, Integralrechnung

Aufgaben

R2.1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) "Die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer Funktion ist eine Funktion."
- b) "Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist eine Zahl."
- c) "Die Funktion f hat ein lokales Maximum bei $x = x_1$, falls $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$."
- d) "Falls $f''(x_2) = 0$ und $f'''(x_2) < 0$, dann hat die Funktion f einen Wendepunkt bei $x = x_2$."
- e) "Falls $g' = f$, dann ist g eine Stammfunktion von f ."
- f) " f mit $f(x) = 2x + 20$ ist eine Stammfunktion von g mit $g(x) = x^2$."
- g) " f mit $f(x) = 3x$ hat unendlich viele Stammfunktionen."
- h) "Das unbestimmte Integral einer Funktion ist eine Menge von Funktionen."

R2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert $f(x_0)$, die erste Ableitung $f'(x_0)$ und die zweite Ableitung $f''(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0 :

- a) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$ $x_0 = -1$
- b) $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$ $x_0 = -2$
- c) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{-3x}$ $x_0 = -\frac{1}{3}$

R2.3 Bestimmen Sie für die gegebene Gesamtkostenfunktion $K(x)$ und Ertragsfunktion $E(x)$...

- i) ... die Grenzkostenfunktion $K'(x)$.
- ii) ... die Grenzertragsfunktion $E'(x)$.
- iii) ... die Grenzgewinnfunktion $G'(x)$.
- a) $K(x) = (40x + 200)$ CHF $E(x) = 60x$ CHF
- b) $K(x) = (5x^2 + 20x + 100)$ CHF $E(x) = (-2x^2 + 100x)$ CHF
- c) $K(x) = (20x^2 + 50 + 3e^{4x})$ CHF $E(x) = (200x - e^{4x^2})$ CHF

R2.4 Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die gegebene Funktion ...

- i) ... ein lokales Maximum hat.
... ein lokales Minimum hat.
- ii) ... einen Wendepunkt hat.
- a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
- b) $f(x)$ wie in R2.2 a)

R2.5 Die Ertragsfunktion für eine Ware oder eine Dienstleistung ist gegeben durch

$$E(x) = (-0.01x^2 + 36x) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie den maximalen Ertrag, falls die Produktion auf höchstens 1500 Einheiten begrenzt ist.

- R2.6 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Ware oder eine Dienstleistung sind

$$K(x) = (x^2 + 100) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten x , bei welcher die Produktion oder Erbringung zu minimalen Durchschnittskosten führt.

Bestimmen Sie auch diese minimalen Durchschnittskosten.

- R2.7 Eine Firma kann pro Monat nur 1000 Einheiten herstellen. Die monatlichen Gesamtkosten sind gegeben durch

$$K(x) = (200x + 300) \text{ CHF}$$

wobei x die hergestellte Stückzahl ist. Angenommen, der Ertrag ist gegeben durch

$$E(x) = \left(-\frac{1}{100}x^2 + 250x\right) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Stückzahl, bei welcher die Firma einen maximalen Gewinn erzielt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

- R2.8 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6) \, dx$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right) \, dx$

- R2.9 Die Funktionsgleichung der dritten Ableitung f''' einer Funktion ist wie folgt gegeben:

$$f'''(x) = 3x + 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f , so dass $f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f(0) = 2$.

- R2.10 Angenommen, die Grenzkosten für die Herstellung eines Produktes oder die Erbringung einer Dienstleistung sind $K'(x) = (5x + 10)$ CHF, wobei die Fixkosten 800 CHF betragen.

Bestimmen Sie die Gesamtkosten für die Herstellung oder Erbringung von 20 Einheiten.

- R2.11 Die Grenzkosten $K'(x)$ und die Ableitung des Durchschnittsertrages $\bar{E}'(x)$ einer bestimmten Firma sind wie folgt gegeben:

$$K'(x) = (6x + 60) \text{ CHF}$$

$$\bar{E}'(x) = -1 \text{ CHF}$$

Bei der Produktion oder Erbringung von 10 Einheiten sind die Gesamtkosten 1000 CHF und der Ertrag 1700 CHF.

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten x , welche zu einem maximalen Gewinn führt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

- R2.12 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = (4x + 4) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-x^2 + 49) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und die Produzentenrente.

R2.13 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = \left(ax^2 - \frac{6}{5}x + 2 \right) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-bx^2 + 110) \text{ CHF}$$

mit den unbekannten Parametern a und b. Der Gleichgewichtspreis ist 10 CHF, und die Produzentenrente beträgt 73.33 CHF (gerundet).

Bestimmen Sie die beiden unbekannten Parameter a und b.

Hinweis:

- Verwenden Sie den ungerundeten Wert $\left(73 + \frac{1}{3} \right) \text{ CHF} = \frac{220}{3} \text{ CHF}$ für die Produzentenrente.