

Aufgaben 13

Anwendungen der Differentialrechnung Lokale/Globale Maxima/Minima, Wendepunkte

Lernziele

- die lokalen Maxima und Minima einer Funktion bestimmen können.
- die Wendepunkte einer Funktion bestimmen können.
- das globale Maximum und das globale Minimum einer Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können.
- das globale Minimum einer Durchschnittskostenfunktion bestimmen können.

Aufgaben

13.1 Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die gegebene Funktion ...

- i) ... ein lokales Maximum hat.
... ein lokales Minimum hat.
 - ii) ... einen Wendepunkt hat.
- a) $f(x) = x^2 - 4$
b) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$
c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$
d) $f(x) = x e^{-x}$
e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2$
f) * $V(r) = -D \left(\frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (D > 0, a > 0)$

13.2 Angenommen, der Gesamtgewinn bei der Herstellung und dem Verkauf einer Ware beträgt

$$G(x) = (2000x + 20x^2 - x^3) \text{ CHF}$$

wobei x die verkauft Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die Stückzahl x bei maximalem Gewinn, und bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die lokalen Maxima.
- Prüfen Sie dann nach, ob eines der lokalen Maxima das globale Maximum ist.

13.3 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Dienstleistung eines Transport- und Logistik-Unternehmens sind gegeben durch

$$K(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 4x + 100 \right) \cdot 100 \text{ CHF}$$

wobei x ein Mass für den Umfang der Dienstleistung ist.

Bestimmen Sie den Wert für x , welcher zu minimalen Durchschnittskosten führt.

Bestimmen Sie auch diese minimalen Durchschnittskosten.

13.4 Angenommen, die Produktionskapazität für eine bestimmte Ware kann 30 nicht überschreiten. Der Gesamtgewinn dieser Firma ist

$$G(x) = (4x^3 - 210x^2 + 3600x) \text{ CHF}$$

wobei x die verkauft Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die Stückzahl x , welche den Gewinn maximiert.

13.5 Angenommen, der jährliche Gewinn eines Geschäfts ist gegeben durch

$$G(x) = (-0.1x^3 + 3x^2) \cdot 1000 \text{ CHF}$$

wobei x die Anzahl Jahre nach 2010 ist.

Bestimmen Sie den Wendepunkt für den Gewinn.

13.6 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Falls f ein lokales Maximum bei x_0 hat, kann gefolgt werden, dass ...

- ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x \neq x_0$
- ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x > x_0$
- ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x < x_0$
- ... $f(x_0) > f(x)$ für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0

b) Falls $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, kann gefolgt werden, dass f ...

- ... kein lokales Minimum bei x_0 hat.
- ... kein lokales Maximum bei x_0 hat.
- ... keinen Wendepunkt bei x_0 hat.
- ... einen Wendepunkt bei x_0 hat.

c) Das globale Maximum einer Funktion ...

- ... ist immer ein lokales Maximum.
- ... kann ein lokales Minimum sein.
- ... kann ein lokales Maximum sein.
- ... existiert immer.