

Aufgaben 5

Lineare Funktion und Gleichungen Lineare Gleichungssysteme

Lernziele

- ein lineares Gleichungssystem lösen können.
- angewandte Problemstellungen mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen bearbeiten können.

Aufgaben

5.1 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a) $4x + 3y = 14$

$2x - y = 12$

b) $-4a - b = 40$

$a + 5b = 9$

c) $12x + 9y = 15$

$4x + 3y = 5$

d) $a - 4b = 3$

$-5a + 20b = 10$

e) $2p - 6q = 6$

$5p + 3q = 42$

f) $(x + 5)(y + 1) = (x + 8)(y - 3)$

$(x - 3)(y - 1) = (x - 1)(y + 3)$

g) $2(2a + 3b) = 3(3a - b) + 5$

$4(3a - 4b) = 2(a + b) - 10$

5.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion, deren Graf die zwei Punkte P und Q enthält:

a) P(5|-3) Q(-2|1)

b) P(2|-3) Q(-1|-4)

c) P(3|-7) Q(3|-9)

5.3 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Grafen der beiden linearen Funktionen f und g:

a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = f(x) = -3x + \frac{5}{4}$ $x \mapsto y = g(x) = -x - 1$

b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = f(x) = 2x + \frac{5}{4}$ $x \mapsto y = g(x) = 2x - 1$

5.4 Manager A sagt zu Manager B: "Wenn drei Viertel Deiner Angestellten in mein Unternehmen wechseln würden, hätte ich insgesamt 100 Angestellte." Manager B antwortet: "Wenn die Hälfte Deiner Angestellten in mein Unternehmen wechseln würden, hätte ich insgesamt 100 Angestellte."

Bestimmen Sie die Anzahl Angestellten, welche A und B in ihren Unternehmen beschäftigen.

5.5 Die (nicht-lineare) Gleichung $ax^2 + bx = 1$ hat die Lösungsmenge $L = \{2, 3\}$, d.h. die Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

Bestimmen Sie die beiden Parameter a und b.

5.6 3000 CHF werden drei Gewinnern verliehen. Der erste Preis beträgt $5/3$ des zweiten, während der zweite Preis $3/2$ des dritten beträgt.

Bestimmen Sie die Höhe der drei Preise.

5.7 Red Tide und Blue Flake planen neue Dienstleistungsprodukte im Bereich Digital Business Management.

Red Tide

Im ersten Jahr betragen die Fixkosten für den Aufbau des Dienstleistungsproduktes 90'000 CHF. Die variablen Kosten für das Erbringen jeder Dienstleistungseinheit werden zu 160 CHF geschätzt, und der Verkaufspreis wird 510 CHF pro Einheit betragen. Geplant wird, im ersten Jahr 3000 Dienstleistungseinheiten zu verkaufen.

Blue Flake

Im ersten Jahr betragen die Fixkosten für den Aufbau des Dienstleistungsproduktes 80'000 CHF. Die variablen Kosten für das Erbringen jeder Dienstleistungseinheit werden zu 160 CHF geschätzt, und der Verkaufspreis wird 500 CHF pro Einheit betragen. Geplant wird, im ersten Jahr 3500 Dienstleistungseinheiten zu verkaufen.

Bestimmen Sie die Anzahl Dienstleistungseinheiten, welche Red Tide und Blue Flake verkaufen müssen, um den gleichen Gewinn zu erzielen.

Bestimmen Sie auch diesen Gewinn.

5.8 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ...

- ... ist nicht zwingend eine Lösung jeder Gleichung des Gleichungssystems.
- ... ist nicht zwingend ein Element der Lösungsmenge.
- ... besteht aus zwei Lösungen, falls das Gleichungssystem zwei Unbekannte enthält.
- ... besteht aus einem Zahlenpaar, falls das Gleichungssystem zwei Unbekannte enthält.

b) Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ...

- ... entspricht immer einem gemeinsamen Punkt von Grafen linearer Funktionen.
- ... entspricht immer einem Schnittpunkt von genau zwei Geraden.
- ... entspricht immer einem Punkt im dreidimensionalen Raum.
- ... ist die einzige Lösung, falls die Grafen der entsprechenden linearen Funktionen parallel sind.

c) Wenn ein lineares Gleichungssystem die Lösung $(x,y) = (2,3)$ hat, kann gefolgert werden, dass es ...

- ... mehr Unbekannte enthält als Gleichungen.
- ... zwei Gleichungen enthält.
- ... zwei Unbekannte enthält.
- ... zwei Lösungen hat.

Lösungen

5.1 a) $(x, y) = (5, -2)$

b) $(a, b) = (-11, 4)$

c) unendlich viele Lösungen

$$(x, y) = \left(x, \frac{5-4x}{3} \right) (x \in \mathbb{R})$$

$$L = \left\{ \left(x, \frac{5-4x}{3} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

d) keine Lösung

$$L = \{ \}$$

e) $(p, q) = (15/2, 3/2)$

f) $(x, y) = (-2, 7)$

g) unendlich viele Lösungen

$$(a, b) = \left(a, \frac{5(1+a)}{9} \right) (a \in \mathbb{R})$$

$$L = \left\{ \left(a, \frac{5(1+a)}{9} \right) : a \in \mathbb{R} \right\}$$

5.2 a) $y = f(x) = -\frac{4}{7}x - \frac{1}{7}$

Hinweise:

- Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet $y = f(x) = ax + b$

- P(5|-3) und Q(-2|1) sind Punkte des Grafen der linearen Funktion. Daher müssen die Koordinaten von P und Q die Funktionsgleichung der linearen Funktion erfüllen, d.h. $-3 = f(5) = a \cdot 5 + b$ und $1 = f(-2) = a \cdot (-2) + b$

- Es muss also das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$-3 = 5a + b$$

$$1 = -2a + b$$

b) $y = f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$

c) Steigung nicht definiert, also keine Funktion

5.3 a) $P(9/8 \mid -17/8)$

Hinweise:

- $P(x_1|y_1)$ sei ein Schnittpunkt der Grafen der beiden Funktionen f und g. Dann müssen die Koordinaten x_1 und y_1 die beiden Gleichungen $y_1 = f(x_1)$ und $y_1 = g(x_1)$ erfüllen.

- Es muss also das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$y = -3x + \frac{5}{4}$$

$$y = -x - 1$$

b) kein Schnittpunkt, da die Grafen parallel sind

5.4 A: 40 Angestellte B: 80 Angestellte

Hinweise:

- Übersetzen Sie die beiden Aussagen der Manager in zwei Gleichungen, d.h. in ein System zweier linearer Gleichungen, in welchem die Zahl der Angestellten in den beiden Unternehmen die Unbekannten sind.

- Lösen Sie das Gleichungssystem.

5.5 $a = -\frac{1}{6}$ $b = \frac{5}{6}$

5.6 1. Preis = 1500 CHF 2. Preis = 900 CHF 3. Preis = 600 CHF

5.7 Red Tide

$$\text{Gesamtkosten } K_1(x) = (160x + 90'000) \text{ CHF}$$

$$\text{Ertrag } E_1(x) = 510x \text{ CHF}$$

$$\text{Gewinn } G_1(x) = E_1(x) - K_1(x) = (350x - 90'000) \text{ CHF}$$

Blue Flake

$$\text{Gesamtkosten } K_2(x) = (160x + 80'000) \text{ CHF}$$

$$\text{Ertrag } E_2(x) = 500x \text{ CHF}$$

$$\text{Gewinn } G_2(x) = E_2(x) - K_2(x) = (340x - 80'000) \text{ CHF}$$

$$G_2(x) = G_1(x)$$

$$\Rightarrow x = 1000, G_1(1000) = G_2(1000) = 260'000 \text{ CHF}$$

1000 Dienstleistungseinheiten, Gewinn = 260'000 CHF

5.8 a) 4. Aussage

b) 1. Aussage

c) 3. Aussage