

Aufgaben 3 **Lineare Funktion und Gleichungen** **Lineare Funktion, Einfacher Zins, Kosten, Ertrag, Gewinn, -schwelle**

Lernziele

- eine Beziehung zwischen zwei Grössen als Funktion verstehen können.
- die Definitionsmenge, Zielmenge und Bildmenge einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- den Grafen einer gegebenen linearen Funktion zeichnen können.
- die Steigung und den Achsenabschnitt einer linearen Funktion bestimmen können.
- einige Beispiele von linearen Funktionen aus Wirtschafts- und Alltagsanwendungen kennen.
- wissen und verstehen, was einfacher Zins ist.
- Berechnungen für die einfache Verzinsung ausführen können.
- wissen und verstehen, was Fixkosten, variable Kosten, Gesamtkosten, Ertrag, Gewinn und Gewinnschwelle sind.
- das Konzept der linearen Funktion in einem neuen Problem anwenden können.

Aufgaben

- 3.1 Ein Taxifahrer verlangt den folgenden Tarif:

8 CHF plus 1.50 CHF pro Kilometer

Fassen Sie den Tarif als eine Funktion f auf.

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich D , den Zielbereich Z und den Wertebereich B der Funktion.
- Zeichnen Sie den Grafen der Funktion f .

- 3.2 Der in der Aufgabe 3.1 beschriebene Taxitarif kann als lineare Funktion aufgefasst werden, welche jedem Fahrweg einen Fahrpreis zuordnet:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto y = f(x) = ax + b$$

$$\text{mit: } \begin{array}{l} x = \text{Fahrweg/km} \\ y = \text{Fahrpreis/CHF} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Werte von a und b .

- 3.3 Finden Sie mindestens zwei weitere Beispiele linearer Funktionen aus der Wirtschaft und dem Alltag.

- 3.4 Zeichnen Sie die Grafen der folgenden linearen Funktionen, und bestimmen Sie sowohl die Steigung als auch den Achsenabschnitt:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = f(x) = -2$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = f(x) = 2x - 6$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = f(x) = -x + 3$

- 3.5 Ein Anfangskapital von 5000 CHF wird zum Jahreszinssatz 0.5% einfach verzinst.

- Bestimmen Sie den Zins, der jedes Jahr ausbezahlt wird.
- (siehe nächste Seite)

- b) Bestimmen Sie das Kapital nach zehn Jahren.
- c) Bestimmen Sie sowohl die Steigung als auch den Achsenabschnitt der entsprechenden linearen Funktion.

3.6 Wenn allgemein ein Anfangskapital K_0 zum Jahreszinssatz i (z.B. $i = 1.5\% = 0.015$) einfach verzinst wird, dann gilt für das Kapital K_n nach n Jahren die folgende Formel (siehe [Formelsammlung](#)):

$$K_n = K_0(1 + ni)$$

- a) Prüfen Sie nach, dass die gegebene Formel korrekt ist.
- b) Bestimmen Sie sowohl Steigung als auch Achsenabschnitt der entsprechenden linearen Funktion.

3.7 Ein Anfangskapital $K_0 = 1200$ CHF wird zum Jahreszinssatz 1.5% einfach verzinst.

- a) Bestimmen Sie, nach wievielen Jahren das Kapital 2000 CHF übersteigt.
- b) Bestimmen Sie den Jahreszinssatz (auf 0.05% gerundet), bei welchem das Kapital nach 20 Jahren 2000 CHF übersteigt.

Hinweis:

- Verwenden Sie die Formel in der Aufgabe 3.6, und lösen Sie nach n bzw. i auf.

3.8 Ein Satelliten-Telefonie-Unternehmen bietet drei verschiedene Tarife an:

Tarif A:	monatliche Grundgebühr von 10 CHF plus 0.20 CHF pro Minute
Tarif B:	monatliche Grundgebühr von 25 CHF plus 0.10 CHF pro Minute
Tarif C:	keine Grundgebühr, 0.60 CHF pro Minute

Fassen Sie die drei Tarife als lineare Funktionen auf.

- a) Zeichnen Sie die Grafen der drei Funktionen in ein einziges Koordinatensystem.
- b) Bestimmen Sie die Gesamtgebühr für alle drei Tarife bei einer monatlichen Gesprächsdauer von 1 Stunde.
- c) Bestimmen Sie die monatliche Gesprächsdauer, für welche der Tarif A günstiger ist als der Tarif C.
- d) Bestimmen Sie die monatliche Gesprächsdauer, für welche der Tarif B günstiger ist als der Tarif A.

3.9 Wirtschaft: Kosten

Raggs AG, eine Bekleidungsfirma, hat **Fixkosten** von 10'000 CHF pro Jahr. Diese Kosten für Miete, Unterhalt, usw. müssen bezahlt werden unabhängig davon, wieviel die Firma produziert. x Stück eines bestimmten Kleides herzustellen kostet, zusätzlich zu den Fixkosten, 20 CHF pro Kleid. Dies bedeutet, dass die **variablen Kosten** für die Herstellung von x Kleidern $20x$ CHF beträgt. Diese Kosten hängen also von der Produktionsmenge ab und hängen von Material, Gehältern, Öl, usw. ab. Die **Gesamtkosten** $K(x)$ für die Produktion von x Kleidern ist gegeben durch eine Funktion K :

$$K(x) = (\text{Variable Kosten}) + (\text{Fixkosten}) = (20x + 10'000) \text{ CHF}$$

- a) Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen für die variablen Kosten, die Fixkosten und die Gesamtkosten.
- b) Bestimmen Sie die Gesamtkosten sowohl bei 100 als auch bei 400 Kleidern.

3.10 (siehe nächste Seite)

3.10 Wirtschaft: Gewinn-Verlust-Analyse

Wenn ein Unternehmen ein Stück eines Artikels verkauft, dann erhält es den Preis, den der Käufer bezahlt. Dieser ist normalerweise höher als die Kosten für die Produktion.

- a) Der **Ertrag**, den ein Unternehmen erzielt, ist das Produkt der verkauften Stückzahl und dem dafür bezahlten Preis. Wenn also Raggs AG (siehe Aufgabe 4.9) x Kleider zu 80 CHF verkauft, dann ist der Ertrag $E(x)$ gegeben durch

$$E(x) = \text{Stückpreis} \cdot \text{verkaufte Stückzahl} = 80x \text{ CHF}$$

Es sei $K(x) = (20x + 10'000)$ CHF (siehe Aufgabe 3.9).

Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen E und K ins gleiche Koordinatensystem.

- b) Der **Gewinn**, den ein Unternehmen erzielt, ist der Betrag, der übrig bleibt, wenn vom Ertrag die Gesamtkosten subtrahiert worden sind. Wenn also $G(x)$ der Gewinn bei x verkauften Stück ist, erhalten wir

$$G(x) = \text{Ertrag} - \text{Gesamtkosten} = E(x) - K(x)$$

Bestimmen Sie $G(x)$, und zeichnen Sie den Grafen der Funktion G in das gleiche Koordinatensystem, welches Sie schon bei a) benützt haben.

- c) Das Unternehmen erreicht die **Gewinnschwelle** bei derjenigen Stückzahl x , bei welcher $G(x) = 0$ CHF (d.h. kein Gewinn und kein Verlust) gilt. Dies ist der Fall für $E(x) = K(x)$.

Finden Sie den Wert x für die Gewinnschwelle.

3.11 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) ☐ Jede in einem Koordinatensystem eingezeichnete gerade Linie kann als Graf einer linearen Funktion aufgefasst werden.

☐ Der Graf jeder linearen Funktion ist eine Gerade.

☐ Wenn y proportional zu x ist, dann ist x nicht zwingend proportional zu y .

☐ Der Wertebereich jeder linearen Funktion ist $\mathbb{R}$.

- b) f kann keine lineare Funktion sein, falls ...

☐ ... der Graf von f eine Gerade ist.

☐ ... $f(x) \neq x$ für mindestens ein Element x des Definitionsbereichs von f .

☐ ... der Definitionsbereich von f nicht aus allen reellen Zahlen besteht.

☐ ... $f(x) = ax + b$ und dabei a von x abhängt.

- c) Bei einfacher Verzinsung ...

☐ ... entspricht die Beziehung zwischen der Zeit und dem Kapital keiner linearen Funktion.

☐ ... hängt der Zins, welcher am Ende jeder Zinsperiode ausbezahlt wird, vom Kapital am Ende der vorangehenden Zinsperiode ab.

☐ ... ist der Zins, welcher am Ende jeder Zinsperiode ausbezahlt wird, immer der gleiche Geldbetrag.

☐ ... verdoppelt sich das Kapital in weniger als 5 Jahren, falls der Jahreszinssatz 20% beträgt.

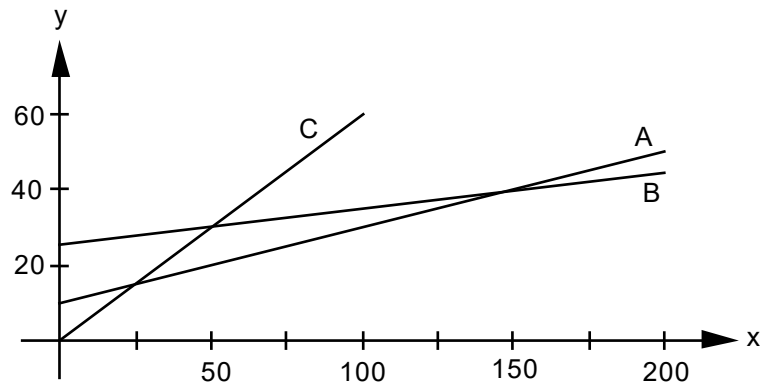
Lösungen

- 3.1 a) $D = \mathbb{R}^+$ (Distanz/km)
 $Z = \mathbb{R}^+$ (Fahrpreis/CHF)
 $B = \{y: y \in \mathbb{R}^+ \text{ und } y > 8\}$
b) ...
- 3.2 $a = 1.5, b = 8$
- 3.3 ...
- 3.4 a) Steigung $a = 0$, Achsenabschnitt $b = -2$
b) Steigung $a = 2$, Achsenabschnitt $b = -6$
c) Steigung $a = -1$, Achsenabschnitt $b = 3$
- 3.5 a) 25 CHF
b) 5250 CHF
c) $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
 $x \mapsto y = f(x) = ax + b$
mit: $x = \text{Anzahl Jahre seit Beginn}$
 $y = \text{Kapital/CHF nach } x \text{ Jahren}$
Steigung $a = 25$, Achsenabschnitt $b = 5000$
- 3.6 a) Jährlicher Zins $= i \cdot K_0$
Kapital K_n nach n Jahren $= K_0 + n \cdot (i \cdot K_0) = K_0 (1 + ni)$
b) Steigung $a = i \cdot K_0$, Achsenabschnitt $b = K_0$
Hinweise:
- Vergleichen Sie die Formel $K_n = K_0 (1 + ni)$ mit der allgemeinen Form der Funktionsgleichung einer linearen Funktion.
- $K_n = K_0 (1 + ni) = an + b = f(n)$
- f mit $f(x) = ax + b$ ist eine lineare Funktion.
- 3.7 a) $n = \frac{\frac{K_n}{K_0} - 1}{i}$ mit $K_0 = 1200$ CHF, $K_n = 2000$ CHF, $i = 1.5\% = 0.015$
 $\Rightarrow n = 44.4... \rightarrow 45$ Jahre
b) $i = \frac{\frac{K_n}{K_0} - 1}{n}$ mit $K_0 = 1200$ CHF, $K_n = 2000$ CHF
 $n = 20 \Rightarrow i = 0.03333... = 3.333...\%$
 $n = 19 \Rightarrow i = 0.03508... = 3.508...\%$
 $\Rightarrow i \in \{3.35\%, 3.40\%, 3.45\%, 3.50\%\}$
- 3.8 a) $x = \text{Gesprächsdauer/min}$
 $y = \text{Gesamtgebühr/CHF}$
Tarif A: $A: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
 $x \mapsto y = A(x) = 0.2x + 10$

Tarif B: $B: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
 $x \mapsto y = B(x) = 0.1x + 25$

Tarif C: $C: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
 $x \mapsto y = C(x) = 0.6x$

Direkte Proportionalität: Die Gesamtgebühr ist direkt proportional zur Gesprächsdauer.



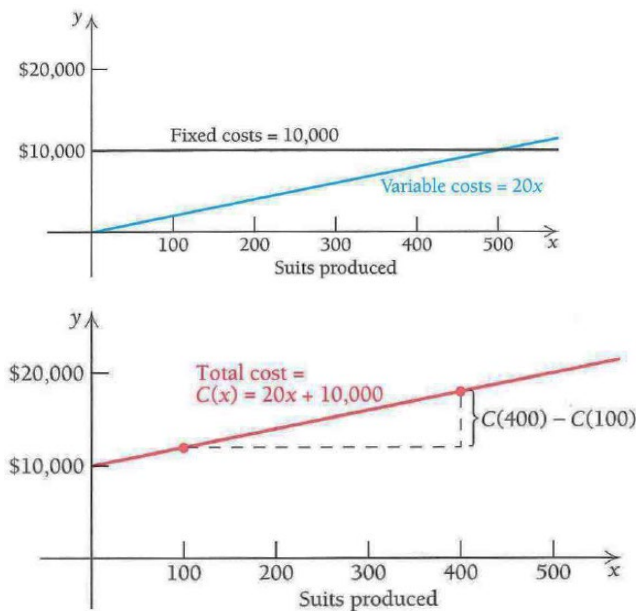
- b) Tarif A: 22 CHF
 Tarif B: 31 CHF
 Tarif C: 36 CHF

- c) über 25 min

Hinweis:
 - Lösen Sie die Gleichung $A(x) = C(x)$ nach x .

- d) über 150 min

3.9 a)



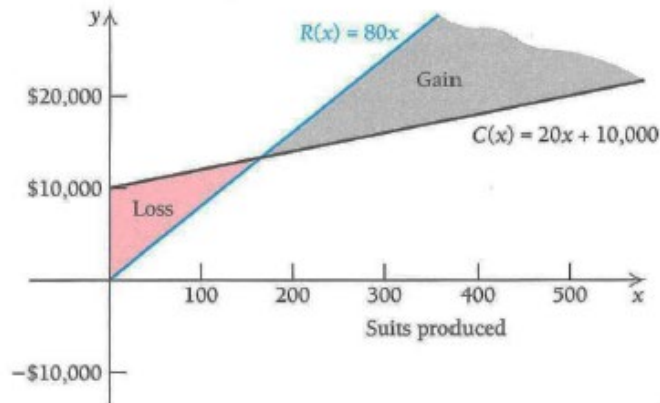
Übersetzung von Fachbegriffen

fixed costs	Fixkosten
variable costs	variable Kosten
total costs $C(x)$	Gesamtkosten $K(x)$

b) $K(100) = (20 \cdot 100 + 10'000) \text{ CHF} = 12'000 \text{ CHF}$
 $K(400) = (20 \cdot 400 + 10'000) \text{ CHF} = 18'000 \text{ CHF}$

3.10

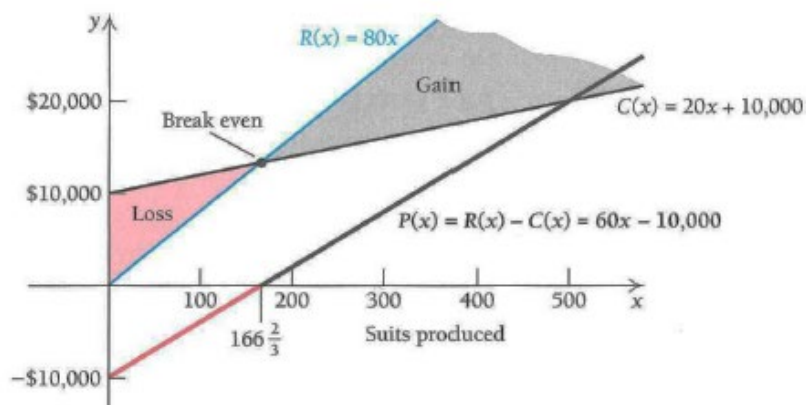
- a) The graphs of $R(x) = 80x$ and $C(x) = 20x + 10,000$ are shown below. When $C(x)$ is above $R(x)$, a loss will occur. This is shown by the region shaded red. When $R(x)$ is above $C(x)$, a gain will occur. This is shown by the region shaded gray.



- b) To find P , the profit function, we have

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) = 80x - (20x + 10,000) \\ &= 60x - 10,000. \end{aligned}$$

The graph of $P(x)$ is shown by the heavy line. The red portion of the line shows a “negative” profit, or loss. The black portion of the heavy line shows a “positive” profit, or gain.



- c) To find the break-even value, we solve $R(x) = C(x)$:

$$\begin{aligned} R(x) &= C(x) \\ 80x &= 20x + 10,000 \\ 60x &= 10,000 \\ x &= 166\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

How do we interpret the fractional answer, since it is not possible to produce $\frac{2}{3}$ of a suit? We simply round to 167. Estimates of break-even values are usually sufficient since companies want to operate well away from break-even values in order to maximize profit. ♦

Übersetzung von Fachbegriffen

loss	Verlust
gain $P(x)$	Gewinn $G(x)$
revenue $R(x)$	Ertrag $E(x)$
break-even	Gewinnschwelle

- 3.11 a) 2. Aussage
 b) 4. Aussage
 c) 3. Aussage