Aufgaben 2 Funktion
Definitionsmenge, Zielmenge, Bildmenge, Graf

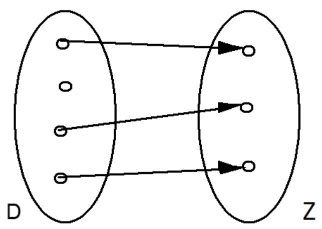
Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Relation eine Funktion ist.
- die Definitionsmenge und die Bildmenge einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.

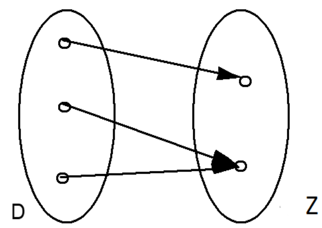
Aufgaben

2.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen Funktionen sind.

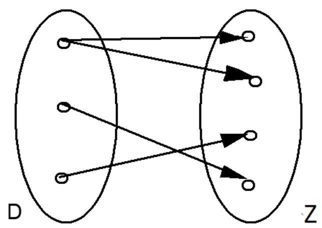
a)



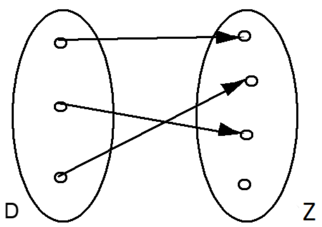
b)



c)



d)



e) D = Menge aller Kurse im FHGR-Bachelor-Studium Digital Business Management
Z = Menge aller FHGR-Lehrpersonen
f: $D \to Z$, $k \mapsto l = f(k)$ = Lehrperson im Kurs k

f) $D = \{1995, 1996, \dots, 2004, 2005\}$
Z = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
f: $D \to Z$, $j \mapsto m = f(j)$ = Mensch mit Jahrgang j

g) D = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
$Z = \{1995, 1996, \dots, 2004, 2005\}$
f: $D \to Z$, $m \mapsto j = f(m)$ = Jahrgang des Menschen m

h) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = x^2$

i) f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$ = Zahl, welche quadriert gleich x ergibt

Hinweis:
- $\mathbb{R}^+$ ist die Menge aller postiven reellen Zahlen, d.h. $\mathbb{R}^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0\}$.

j) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto b = f(t)$ = Bankkontostand zum Zeitpunkt t

2.2 Bestimmen Sie die Bildmenge B der folgenden Funktionen:

a) D = {Januar, Februar, März, ..., Dezember}
Z = {A, B, C, ..., Z}
f: $D \to Z$, $m \mapsto b = f(m)$ = Anfangsbuchstabe des Monats m

b) D = Menge aller Nachbarländer der Schweiz
Z = Menge aller europäischen Städte und Ortschaften
h: $D \to Z$, $x \mapsto y = h(x)$ = Hauptstadt/-ort des Nachbarlandes x

c) Funktion f in der Aufgabe 2.1 g)

d) Funktion f in der Aufgabe 2.1 h)

2.3 a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3 - x$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

i)	$f(1)$	ii)	$f(-2)$	iii)	$f(a)$
iv)	$f(b^2)$	v)	$f(a - b)$	vi)	$f(x^3 - x)$

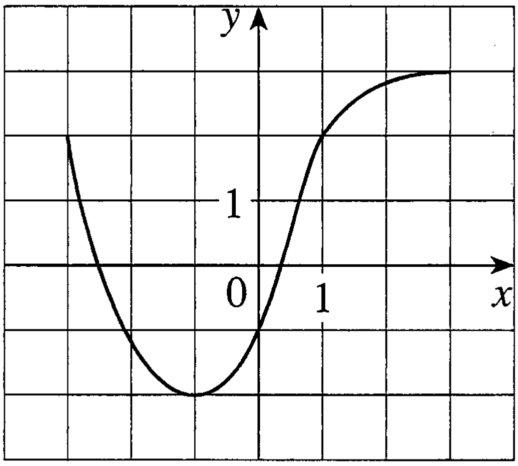
b) g: $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

i)	$g(2)$	ii)	$g(-3)$	iii)	$g(a)$
iv)	$g(b^2)$	v)	$g(a - b)$	vi)	$g\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

2.4 (siehe nächste Seite)

2.4 Gegeben ist der Graf einer Funktion f:



a) Geben Sie den Funktionswert f(-1) an.

b) Schätzen Sie den Funktionswert f(2) ab.

c) Geben Sie alle Werte von x an, für welche f(x) = 2 gilt.

d) Schätzen Sie alle Werte von x ab, für welche f(x) = 0 gilt.

e) Geben Sie den Definitionsbereich (d.h. die Definitionsmenge) D von f an.

f) Geben Sie den Wertebereich (d.h. die Bildmenge) B von f an.

2.5 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Der Wertebereich (d.h. die Bildmenge) B der Funktion f: $\{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x - 4}$, ist die Menge ...

- ☐ ... $\{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\}$
- ☐ ... $\{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } y \geq 4\}$
- ☐ ... $\mathbb{R}$
- ☐ ... $\mathbb{R}_0^+$

b) f kann keine Funktion sein, falls ...

- ☐ ... die Definitionsmenge von f keine Zahlenmenge ist.
- ☐ ... die Zielmenge von f mehr Elemente enthält als die Definitionsmenge von f.
- ☐ ... die Definitionsmenge von f mehr Elemente enthält als die Zielmenge von f.
- ☐ ... mindestens ein Element der Definitionsmenge mehr als ein Bildelement hat.

c) Wenn bei einer Funktion die Bildmenge gleich viele Elemente enthält wie die Definitionsmenge, dann kann man folgern, dass ...

- ☐ ... die Bildmenge die gleiche Menge ist wie die Definitionsmenge.
- ☐ ... die Zielmenge gleich viele Elemente enthält wie die Definitionsmenge.
- ☐ ... jedes Element der Zielmenge auch ein Element der Bildmenge ist.
- ☐ ... kein Element der Bildmenge mehr als einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wird.

Lösungen

2.1 a) keine Funktion
Einem Element von D wird kein Element (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.

b) Funktion

c) keine Funktion
Einem Element von D werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.

d) Funktion

e) keine Funktion
Einigen Elementen von D werden zwei oder mehr Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.

f) keine Funktion
Jedem Element von D werden viele Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.

g) Funktion

h) Funktion

i) keine Funktion
Jedem Element von $\mathbb{R}^+$ werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von $\mathbb{R}$ zugeordnet.

j) Funktion

2.2 a) B = {A, D, F, J, M, N, O, S}

b) B = {Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}

c) B = Z

d) $B = \mathbb{R}_0^+$

Hinweis:
- $\mathbb{R}_0^+$ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen inkl. Null, d.h. $\mathbb{R}_0^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

2.3 a) i) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$

ii) $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$

iii) $f(a) = a^3 - a$

iv) $f(b^2) = (b^2)^3 - b^2 = b^6 - b^2$

v) $f(a - b) = (a - b)^3 - (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$

vi) $f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

b) i) $g(2) = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$

ii) $g(-3) = \frac{(-3)^2}{-3+1} = -\frac{9}{2}$

iii) $g(a) = \frac{a^2}{a+1}$

iv) $g(b^2) = \frac{(b^2)^2}{b^2+1} = \frac{b^4}{b^2+1}$

v) $g(a - b) = \frac{(a-b)^2}{(a-b)+1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b + 1}$

vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+1} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

2.4 a) $f(-1) = -2$

b) $f(2) \approx 2.8$

c) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

d) $x_1 \approx -2.5$, $x_2 \approx 0.3$

e) $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } -3 \leq x \leq 3\}$

f) $B = \{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } -2 \leq y \leq 3\}$

2.5 a) 4. Aussage

b) 4. Aussage

c) 4. Aussage