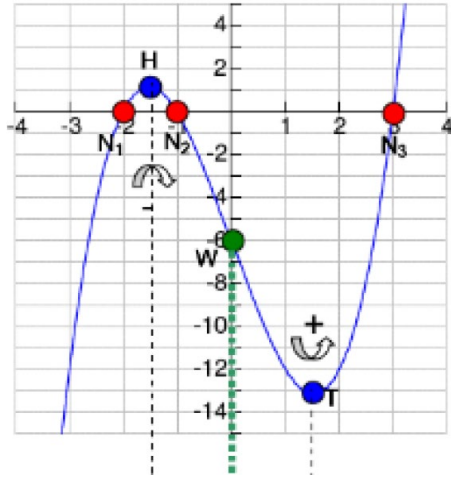
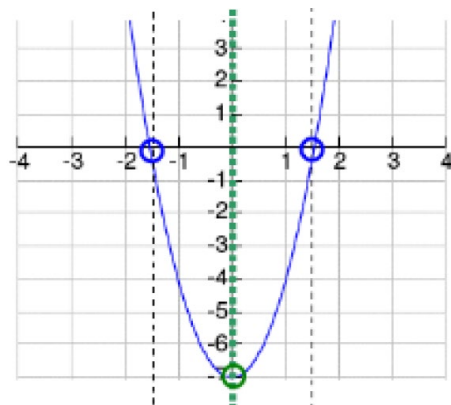


# Steigen/Fallen, Krümmung

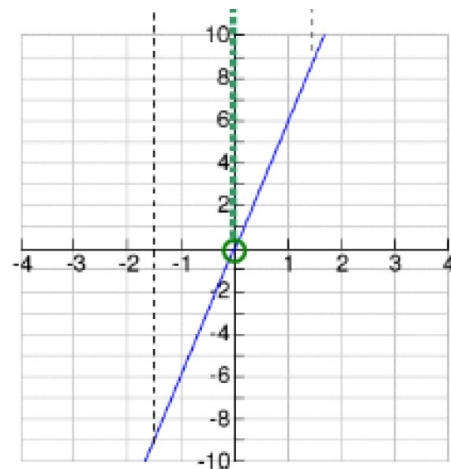
Bsp.:  $f(x) = x^3 - 7x - 6$



$f'(x) = 3x^2 - 7$



$f''(x) = 6x$



## Steigen/Fallen

Wenn die **erste Ableitung** einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  **positiv** ist, d.h.  $f'(x_0) > 0$ , dann **steigt** der Graf von  $f$  bei  $x_0$ .

Wenn die **erste Ableitung** einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  **negativ** ist, d.h.  $f'(x_0) < 0$ , dann **fällt** der Graf von  $f$  bei  $x_0$ .

Bem.: Es gilt auch der Umkehrschluss:

Wenn der Graf einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  steigt, dann ist die erste Ableitung von  $f$  bei  $x_0$  positiv, d.h.  $f'(x_0) > 0$ .

Wenn der Graf einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  fällt, dann ist die erste Ableitung von  $f$  bei  $x_0$  negativ, d.h.  $f'(x_0) < 0$ .

## Krümmung

Wenn die **zweite Ableitung** einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  **positiv** ist, d.h.  $f''(x_0) > 0$ , dann ist der Graf von  $f$  bei  $x_0$  **konvex** ("Links-Kurve").

Wenn die **zweite Ableitung** einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  **negativ** ist, d.h.  $f''(x_0) < 0$ , dann ist der Graf von  $f$  bei  $x_0$  **konkav** ("Rechts-Kurve").

Bem.: Hier gilt der Umkehrschluss **nicht**:

Wenn der Graf einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  konvex ist ("Links-Kurve"), dann ist die zweite Ableitung von  $f$  bei  $x_0$  nicht zwingend positiv, sondern kann positiv oder gleich null sein, d.h.  $f''(x_0) > 0$  oder  $f''(x_0) = 0$ .

Wenn der Graf einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  konkav ist ("Rechts-Kurve"), dann ist die zweite Ableitung von  $f$  bei  $x_0$  nicht zwingend negativ, sondern kann negativ oder gleich null sein, d.h.  $f''(x_0) < 0$  oder  $f''(x_0) = 0$ .

## Lokale Maxima/Minima

Eine Funktion  $f$  hat an der Stelle  $x_0$  ein **lokales Maximum**, falls die Tangente an den Grafen von  $f$  bei  $x_0$  horizontal ist und falls der Graf von  $f$  bei  $x_0$  konkav ist ("Rechts-Kurve").

Dies trifft zu, falls  $f'(x_0) = 0$  (notwendig) und  $f''(x_0) < 0$  (hinreichend, falls  $f'(x_0) = 0$ ).

Eine Funktion  $f$  hat an der Stelle  $x_0$  ein **lokales Minimum**, falls die Tangente an den Grafen von  $f$  bei  $x_0$  horizontal ist und falls der Graf von  $f$  bei  $x_0$  konvex ist ("Links-Kurve").

Dies trifft zu, falls  $f'(x_0) = 0$  (notwendig) und  $f''(x_0) > 0$  (hinreichend, falls  $f'(x_0) = 0$ ).

## Globales Maximum/Minimum

Das **globale Maximum/Minimum** einer stetigen Funktion  $f$  ist entweder ein lokales Maximum/Minimum von  $f$  oder der Funktionswert von  $f$  an einem der Endpunkte des Definitionsbereichs.

## Wendepunkte

Eine Funktion  $f$  hat an der Stelle  $x_0$  einen **Wendepunkt**, falls der Graf von  $f$  bei  $x_0$  seine Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.

Dies trifft zu, falls  $f''(x_0) = 0$  (notwendig) und  $f'''(x_0) \neq 0$  (hinreichend, falls  $f''(x_0) = 0$ ).

Bsp.: (siehe nächste Seite)

Bsp.:  $f(x) = x^3 - 7x - 6$  (siehe Seite 1)  $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 7$   
 $\Rightarrow f''(x) = 6x$   
 $\Rightarrow f'''(x) = 6$

#### Lokale Maxima/Minima

$$f'(x) = 0 \text{ bei } x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}} = 1.52\dots \text{ und } x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}} = -1.52\dots$$

$$f''(x_1) = 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = 9.16\dots > 0 \quad \Rightarrow \text{lokales Minimum bei } x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$f''(x_2) = -6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = -9.16\dots < 0 \quad \Rightarrow \text{lokales Maximum bei } x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

#### Globales Maximum/Minimum

Bsp.:  $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq x \leq 4\}$

$\Rightarrow$  globales Maximum bei  $x = 4$  (Endpunkt des Def.bereichs)

$\Rightarrow$  globales Minimum bei  $x = x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$  (lokales Minimum)

Bsp.:  $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } -4 \leq x \leq 3\}$

$\Rightarrow$  globales Maximum bei  $x = x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$  (lokales Maximum)

$\Rightarrow$  globales Minimum bei  $x = -4$  (Endpunkt des Def.bereichs)

#### Wendepunkte

$$f''(x) = 0 \text{ bei } x_3 = 0$$

$$f'''(x_3) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_3 = 0$$

## Finanzmathematik

**Grenzkosten-/Grenzertrags-/Grenzwinnfunktion**  
= erste Ableitung der Kosten-/Ertrags-/Gewinnfunktion

Bsp.: Kostenfunktion	$K(x) = (2x^2 + 120) \text{ CHF}$
⇒ Grenzkostenfunktion	$K'(x) = 4x \text{ CHF}$
Ertragsfunktion	$E(x) = (-x^2 + 168x) \text{ CHF}$
⇒ Grenzertragsfunktion	$E'(x) = (-2x + 168) \text{ CHF}$
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x) = (-3x^2 + 168x - 120) \text{ CHF}$
⇒ Grenzwinnfunktion	$G'(x) = (-6x + 168) \text{ CHF}$

**Durchschnittskosten-/Durchschnittsertrags-/Durchschnittsgewinnfunktion**

Durchschnittskostenfunktion/Stückkostenfunktion	$\bar{K}(x) := \frac{K(x)}{x}$	mit $K(x)$ = Kostenfunktion
Bsp.: Kostenfunktion	$K(x) = (3x^2 + 4x + 2) \text{ CHF}$	
⇒ Durchschnittskostenfunktion	$\bar{K}(x) = \left(3x + 4 + \frac{2}{x}\right) \text{ CHF}$	
Durchschnittsertragsfunktion	$\bar{E}(x) := \frac{E(x)}{x}$	mit $E(x)$ = Ertragsfunktion
Durchschnittsgewinnfunktion	$\bar{G}(x) := \frac{G(x)}{x}$	mit $G(x)$ = Gewinnfunktion