Gleichungen

Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein **Gleichheitszeichen** verknüpft sind.

Bsp.: $7x - 3 = 12x - 38$
Gleichung

$2(7x - 3) + 5x$
keine Gleichung

Eine **Lösung** einer Gleichung mit einer **Variablen** ist eine Zahl, welche die Gleichung erfüllt bzw. eine wahre Aussage erzeugt, wenn man die Zahl für die Variable einsetzt.

Eine Lösung einer Gleichung mit zwei oder mehreren Variablen ist ein Satz von Zahlen, welche die Gleichung erfüllt bzw. eine wahre Aussage erzeugt, wenn man die Zahlen für die Variablen einsetzt.

Bsp.: $2x + 4 = 10$
Diese Gleichung hat genau eine Lösung: $x = 3$

Bsp.: $x = x + 1$
Diese Gleichung hat keine Lösung.

Bsp.: $y^2 - 1 = 3$
Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $y_1 = 2$
$y_2 = -2$

Bsp.: $\sqrt{x - 1} + y = 2$
Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen: $(x,y)_1 = (2,1)$ d.h. $x_1 = 2$ und $y_1 = 1$
$(x,y)_2 = (5,0)$ d.h. $x_2 = 5$ und $y_2 = 0$
$(x,y)_3 = (10,-1)$ d.h. $x_3 = 10$ und $y_3 = -1$
usw.

Die Menge aller Lösungen einer Gleichung ist die **Lösungsmenge** L.

Bsp.: $2x + 4 = 10$ $L = \{ 3 \}$

Bsp.: $x = x + 1$ $L = \{\}$

Bsp.: $y^2 - 1 = 3$ $L = \{ 2 , -2 \}$

Bsp.: $\sqrt{x - 1} + y = 2$ $L = \{ (2,1) , (5,0) , (10,-1) , ... \}$

Zwei Gleichungen mit derselben Lösungsmenge sind **äquivalent**.

Bsp.: $2x + 4 = 10$
$x + 1 = 4$
Diese beiden Gleichungen haben die gleiche Lösung bzw. die gleiche Lösungsmenge $L = \{ 3 \}$.
Sie sind daher äquivalent.

Lösen einer Gleichung

Man löst eine Gleichung, indem man sie durch eine oder mehrere **Äquivalenzumformungen** in die Form "Unbekannte = ..." bringt.

Bsp.:

$$
\begin{array}{ll}
2x + 4 = 10 & \mid -4 \\
2x = 6 & \mid :2 \\
x = 3 & \\
\Rightarrow\ L = \{ 3 \} &
\end{array}
$$

Bsp.:

$$
\begin{array}{ll}
(x + 2)(x - 3) - 3(2x - 3) = (x - 6)^2 + 2 & \mid \text{ausmultiplizieren} \\
(x^2 - x - 6) - (6x - 9) = (x^2 - 12x + 36) + 2 & \mid \text{Klammern auflösen} \\
x^2 - x - 6 - 6x + 9 = x^2 - 12x + 36 + 2 & \mid \text{vereinfachen} \\
x^2 - 7x + 3 = x^2 - 12x + 38 & \mid -x^2 \\
-7x + 3 = -12x + 38 & \mid +12x \\
5x + 3 = 38 & \mid -3 \\
5x = 35 & \mid :5 \\
x = 7 & \\
\Rightarrow\ L = \{ 7 \} &
\end{array}
$$

Äquivalenzumformungen

Die folgenden Umformungen führen eine Gleichung in eine neue, äquivalente Gleichung über. Die neue Gleichung hat also die gleiche(n) Lösung(en) bzw. die gleiche Lösungsmenge wie die alte Gleichung.

- **Addition** einer **beliebigen Zahl** auf beiden Seiten der Gleichung
- **Subtraktion** einer **beliebigen Zahl** auf beiden Seiten der Gleichung
- **Multiplikation** beider Seiten der Gleichung mit einer **beliebigen Zahl ≠ 0**
- **Division** beider Seiten der Gleichung mit einer **beliebigen Zahl ≠ 0**
- ...

Gleichungssysteme

Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Bsp.: $2x + y = 5$
$x + 2y = 4$
Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten (x und y)

Bsp.: $3p - 2r + 4s - t = 0$
$p^2 + q^2 = 1$
$p + q = r - s$
Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten (p, q, r, s, t)

Eine **Lösung des Gleichungssystems** besteht aus einem Satz von Zahlen für die Unbekannten, für welche **alle** Gleichungen erfüllt sind.

Bsp.: $2x + y = 5$ I
$x + 2y = 4$ II

Die Gleichung I hat unendlich viele Lösungen:
$(x,y)_1 = (0,5)$
$(x,y)_2 = (1,3)$
$(x,y)_3 = \mathbf{(2,1)}$
$(x,y)_4 = (3,-1)$
$(x,y)_5 = (4,-3)$
etc.

Die Gleichung II hat ebenfalls unendlich viele Lösungen:
$(x,y)_1 = (-2,3)$
$(x,y)_2 = (0,2)$
$(x,y)_3 = \mathbf{(2,1)}$
$(x,y)_4 = (4,0)$
$(x,y)_5 = (6,-1)$
etc.

Nur das Paar $(x,y) = (2,1)$ erfüllt sowohl die Gleichung I als auch die Gleichung II.

Das ganze Gleichungssystem hat daher genau eine Lösung:
$(x,y) = (2,1)$

Lösen eines Gleichungssystems

1. Operationen

- **Äquivalenzumformung** einer einzelnen Gleichung
  (siehe "Lösen einer Gleichung" oben)

  Eine Äquivalenzumformung ändert nichts an den Lösungen einer einzelnen Gleichung.

  Bsp.: $2x + y = 5 \quad | \cdot 2$
  $4x + 2y = 10$

  Beide Gleichungen haben die gleichen Lösungen
  $(x,y)_1 = (0,5)$
  $(x,y)_2 = (1,3)$
  $(x,y)_3 = (2,1)$
  $(x,y)_4 = (3,-1)$
  $(x,y)_5 = (4,-3)$
  usw.

- **Addition** zweier Gleichungen des Gleichungssystems

  Zwei Gleichungen eines Gleichungssystems lassen sich zu einer einzigen Gleichung umformen, indem die beiden linken Seiten und die beiden rechten Seiten der Gleichungen addiert werden.
  In den Lösungen der neuen Gleichung sind die gemeinsamen Lösungen der ursprünglichen beiden Gleichungen enthalten (ohne Beweis).

  Bsp.: $2x + y = 5 \quad \text{I}$
  $x + 2y = 4 \quad \text{II}$

  Addition der beiden Gleichungen führt zur neuen Gleichung

  $3x + 3y = 9 \quad \text{III}$

  Die Gleichung III hat die Lösungen
  $(x,y)_1 = (0,3)$
  $(x,y)_2 = (1,2)$
  $(x,y)_3 = \mathbf{(2,1)}$
  $(x,y)_4 = (3,0)$
  usw.
  In diesen Lösungen ist die gemeinsame Lösung $(x,y) = (2,1)$ der ursprünglichen Gleichungen I und II enthalten.

2. Lösen eines linearen Gleichungssystems

- **Substitutions-/Einsetzmethode**

Bsp.: $4x + 7y = -16$ I
$7x - 3y = 33$ II

I nach x lösen

$4x + 7y = -16 \quad | -7y$
$4x = -7y - 16 \quad | :4$
$x = \frac{-7y-16}{4}$ III

Ausdruck für x in II einsetzen und nach y lösen

$7\frac{-7y-16}{4} - 3y = 33 \quad | \cdot 4$
$7(-7y - 16) - 12y = 132$
$-49y - 112 - 12y = 132$
$-61y - 112 = 132 \quad | +112$
$-61y = 244 \quad | :(-61)$
$y = -4$

Wert für y in III einsetzen

$x = \frac{-7\cdot(-4)-16}{4} = 3$

(x,y) = (3,-4)

- **Additionsmethode**

Bsp.: $4x + 7y = -16$ I
$7x - 3y = 33$ II

Geeignete Vielfache von I und II bilden

3·I $12x + 21y = -48$ III
7·II $49x - 21y = 231$ IV

III und IV addieren und nach x lösen

III+IV $61x = 183 \quad | :61$
$x = 3$

Wert für x in I einsetzen und nach y lösen

$4\cdot 3 + 7y = -16 \quad | -12$
$7y = -28 \quad | :7$
$y = -4$

(x,y) = (3,-4)

- **Gleichsetzungsmethode**

Bsp.: $4x + 7y = -16$ I
$7x - 3y = 33$ II

I nach x lösen

$4x + 7y = -16 \quad | -7y$
$4x = -7y - 16 \quad | :4$
$x = \frac{-7y-16}{4}$ III

II nach x lösen

$$7x - 3y = 33 \qquad | + 3y$$
$$7x = 3y + 33 \qquad | : 7$$
$$x = \frac{3y + 33}{7} \qquad \text{IV}$$

Ausdrücke für x in III und IV gleichsetzen und nach y lösen

$$\frac{-7y - 16}{4} = \frac{3y + 33}{7} \qquad | \cdot 28$$
$$7(-7y - 16) = 4(3y + 33)$$
$$-49y - 112 = 12y + 132 \qquad | + 49y \quad | - 132$$
$$61y = -244 \qquad | : 61$$
$$y = -4$$

Wert für y in III einsetzen

$$x = \frac{-7\cdot(-4) - 16}{4} = 3$$

(x,y) = (3,-4)