Aufgaben 12 — Ableitungsregeln
Faktor-/Summen-/Produktregel, Höhere Ableitungen

Lernziele

- die Faktor-, Summen- und Produktregel anwenden können, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen.
- eine höhere Ableitung einer Funktion bestimmen können.

Aufgaben

12.1 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Faktorregel**:

a) $f(x) = 3x^5$ b) $f(x) = -4x^3$ c) $f(x) = -x^{10}$

d) $f(x) = a \cdot x^3$ e) $f(x) = n \cdot x^{n-1}$ f) $f(x) = 9 \cdot 3^x$

g) $s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ h) $S(T) = \alpha \cdot T^4$ i) $C(x) = (-3x)^3$

12.2 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Summenregel**:

a) $f(x) = x^5 + x^6$ b) $f(x) = x^{10} - x^9$ c) $f(x) = 1 + x + 3x^3$

d) $f(x) = \frac{1}{4} x^4 + 3x^2 - 2$ e) $f(x) = 3x^2(x - 2)$ f) $f(x) = - 3x^8 + x^5 - 3x + 99$

g) $f(x) = ax^2 + bx + c$ h) $f(x) = 3(a^2 - 2ax + x^2)$ i) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$

j) $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$ k) $V(r) = - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ l) $K(n) = K_0(1 + ni)$

Hinweis :
- In einigen Teilaufgaben benötigt man zusätzlich die Faktorregel.

12.3 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Produktregel**:

a) $f(x) = x \cdot e^x$ b) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$

c) $f(x) = - 2x^5(x - 1)$ d) $f(x) = (2x - 1) \cdot e^x$

e) $f(x) = (2x - 1)(- 3x^2 - x + 1)$ f) $V(r) = e^r \left(a \cdot r^2 - \frac{b}{r^3}\right)$

Hinweis:
- In einigen Teilaufgaben benötigt man zusätzlich die Faktor- und/oder die Summenregel.

12.4 Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Exponentialfunktionen:

a) $f(x) = e^{4x}$ b) $f(x) = e^{-x}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$ d) $f(x) = e^{x^2-2x+5}$

12.5 Bestimmen Sie die Ableitung. Verwenden Sie dabei die geeignete(n) Ableitungsregel(n). Vereinfachen und faktorisieren Sie die Ableitung so weit wie möglich:

a) $f(x) = (x - 2)\, e^{2x}$ b) $f(x) = (2 - x^2)\, e^{-x}$

c) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x - 1)\, e^{-2x}$ d) $P(v) = av^2\, e^{-bv^2}$

12.6 (siehe nächste Seite)

12.6 Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen (Änderungsraten):

a) $f'(2)$ für die Funktion f in 12.1 b)

b) $s'(4)$ für die Funktion s in 12.1 g)

c) $f'(-1)$ für die Funktion f in 12.2 g)

d) $P'(1)$ für die Funktion P in 12.5 d)

12.7 Bestimmen Sie die zweite und die dritte Ableitung der angegebenen Funktionen. Vereinfachen und faktorisieren Sie die höheren Ableitungen so weit wie möglich:

a) Funktion f in 12.1 a)

b) Funktion f in 12.2 g)

c) Funktion f in 12.3 a)

d) Funktion f in 12.4 c)

Hinweis:
- Sie haben bereits die erste Ableitung der entsprechenden Funktionen bestimmt.

12.8 Bestimmen Sie die angegebenen höheren Ableitungen:

a) $f''(-1)$ für die Funktion f in 12.1 a)

Hinweis:
- Sie haben in 12.7 a) bereits $f''(x)$ bestimmt.

b) $f'''(2)$ für die Funktion f in 12.4 c)

Hinweis:
- Sie haben in 12.7 d) bereits $f'''(x)$ bestimmt.

12.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Die dritte Ableitung einer Funktion ist eine ...

- ☐ ... konstante Funktion, falls die zweite Ableitung eine quadratische Funktion ist.
- ☐ ... quadratische Funktion, falls die zweite Ableitung eine lineare Funktion ist.
- ☐ ... lineare Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.
- ☐ ... konstante Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.

b) Die Ableitung ...

- ☐ ... eines Produkts ist das Produkt der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
- ☐ ... eines Produkts ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
- ☐ ... einer Summe ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden.
- ☐ ... einer Konstanten ist die Konstante selbst.

c) Für $f(x) = c \cdot g(x) \cdot h(x)$ gilt $f'(x) = \ldots$

- ☐ ... 0
- ☐ ... $c \cdot g'(x) \cdot h'(x)$
- ☐ ... $c \cdot g(x) \cdot h'(x) + c \cdot g'(x) \cdot h(x)$
- ☐ ... $c \cdot g'(x) \cdot h'(x) + c \cdot g(x) \cdot h(x)$

Lösungen

12.1 a) $f'(x) = 3\cdot 5x^4 = 15x^4$

b) $f'(x) = (-4)\ 3x^2 = -12x^2$

c) $f'(x) = (-1)\ 10x^9 = -10x^9$

d) $f'(x) = a\cdot 3x^2 = 3ax^2$

Hinweis:
- a ist eine Konstante.

e) $f'(x) = n(n-1)x^{n-2}$

f) $f'(x) = 9\cdot 3^x\cdot \ln(3)$

g) $s'(t) = \frac{g}{2}\ 2t = gt$

Hinweise:
- Der Name der Funktion ist s, und die Variable ist t.
- g ist eine Konstante.

h) $S'(T) = \alpha\cdot 4T^3 = 4\alpha T^3$

i) $C'(x) = -\ 81x^2$

12.2	a)	$f'(x) = 5x^4 + 6x^5$	b)	$f'(x) = 10x^9 - 9x^8$	c)	$f'(x) = 1 + 9x^2$
	d)	$f'(x) = x^3 + 6x$	e)	$f'(x) = 9x^2 - 12x$	f)	$f'(x) = -\ 24x^7 + 5x^4 - 3$
	g)	$f'(x) = 2ax + b$	h)	$f'(x) = -\ 6a + 6x$	i)	$f'(x) = x^2 + \frac{9}{x^4}$
	j)	$s'(t) = v_0 + gt$	k)	$V'(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3}$	l)	$K'(n) = K_0\cdot i$

12.3 a) $f'(x) = e^x + x\cdot e^x$

b) $f'(x) = 3x^2\cdot 3^x + x^3\cdot 3^x\cdot \ln(3)$

c) $f'(x) = -\ 2(5x^4(x - 1) + x^5)$

d) $f'(x) = 2\cdot e^x + (2x - 1)\cdot e^x$

e) $f'(x) = 2(-\ 3x^2 - x + 1) + (2x - 1)\ (-\ 6x - 1)$

f) $V'(r) = e^r\left(a\cdot r^2 - \frac{b}{r^3}\right) + e^r\left(2a\cdot r + \frac{3b}{r^4}\right)$

Hinweise:
- V ist der Name der Funktion, und r ist die Variable.
- a und b sind Konstanten.

12.4 a) $f'(x) = 4\ e^{4x}$ b) $f'(x) = (-1)\ e^{-x} = -\ e^{-x}$

c) $f'(x) = -\ 2x\cdot e^{-x^2}$ d) $f'(x) = (2x - 2)\ e^{x^2 - 2x + 5}$

12.5 a) $f'(x) = e^{2x} + (x - 2)\ 2\ e^{2x} = (2x - 3)\ e^{2x}$

b) $f'(x) = -\ 2x\ e^{-x} + (2 - x^2)\ (-1)\ e^{-x} = (x^2 - 2x - 2)\ e^{-x}$

c) $f'(x) = (9x^2 - 4x + 1)\ e^{-2x} + (3x^3 - 2x^2 + x - 1)\ (-2)\ e^{-2x} = (-\ 6x^3 + 13x^2 - 6x + 3)\ e^{-2x}$

d) $P'(v) = a\left(2v\ e^{-bv^2} + v^2(-2bv)\ e^{-bv^2}\right) = 2av\ (1 - bv^2)\ e^{-bv^2}$

12.6 (siehe nächste Seite)

12.6 a) 12.1 b)
$f'(2) = -48$

b) 12.1 g)
$s'(4) = 4g$

c) 12.2 g)
$f'(-1) = -2a + b$

d) 12.5 d)
$P'(1) = 2a\,(1 - b)\,e^{-b}$

12.7 a) 12.1 a)
$f''(x) = 15 \cdot 4x^3 = 60x^3$
$f'''(x) = 60 \cdot 3x^2 = 180x^2$

b) 12.2 g)
$f''(x) = 2a \cdot 1 = 2a$
$f'''(x) = 0$

c) 12.3 a)
$f''(x) = e^x + (e^x + x \cdot e^x) = (x + 2)\,e^x$
$f'''(x) = e^x + (x + 2)\,e^x = (x + 3)\,e^x$

d) 12.4 c)
$f''(x) = -2\left(e^{-x^2} + x\,(-2x)\,e^{-x^2}\right) = 2\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}$
$f'''(x) = 2\left(4x\,e^{-x^2} + (2x^2 - 1)(-2x)\,e^{-x^2}\right) = 4x\,(-2x^2 + 3)\,e^{-x^2}$

12.8 a) $f''(-1) = 60\,(-1)^3 = -60$

b) $f'''(2) = 4 \cdot 2\,(-2 \cdot 2^2 + 3)\,e^{-2^2} = -\frac{40}{e^4}$

12.9 a) 4. Aussage

b) 3. Aussage

c) 3. Aussage